Математика укытучысы китапханәсе

ГЕОМЕТРИЯДӘН МӘСЬӘЛӘЛӘР ҖЫЕНТЫГЫ

6-8 нче класслар өчен

ГЕОМЕТРИЯДӘН МӘСЬӘЛӘЛӘР ҖЫЕНТЫГЫ 6-8

Математика укытучысы китапханәсе

ГЕОМЕТРИЯДӘН МӘСЬӘЛӘЛӘР ҖЫЕНТЫГЫ
—8 нче КЛАССЛАР ӨЧЕН

Русчадан
З. Х. Билалова һәм Ф. М. Хафизова
тәржемәсе

КАЗАН ТАТАРСТАН КИТАП НӘШРИЯТЫ 1982

ББК 74.262.7.
Г39

Гусев В. А., Маслова Г. Г., Скопец З. А., Черкасов Р. С.

Сборник задач по геометрии для 6—8 классов
Изд. 2-е. М., „Просвещение", 1979.

СССР Мәгариф министрлыгының мәктәпләр баш идарәсе тарафыннан тәкъдим ителә

Геометриядән мәсьәләләр җыентыгы. 6—8 класслар өчен.
Г 39 Русча 2 нче басмадан З. Х. Билалова һәм Ф. М. Хафизова тәрҗемәсе. Казан. Тат. кит. нәшр., 1982.

224 б. (Математика укытучысы китапханәсе).

$Г\frac{60\,501-289}{М\,132(03)-82}$ БЗ—48—58—81 3508010232 ББК. 74.262.7.

© Издательство „Просвещение", 1975.
© татарчага тәрҗемә, Татарстан китап нәшрияты, 1982.

СҮЗ БАШЫ

VI — VIII класслар өчен геометриядән мәсьәләләр җыентыгы сигезьеллык мәктәпнең геометрия дәреслегенә өстәмә материал булып тора.

Җыентык ике кисәктән гыйбарәт. Беренче кисәк яңа материалны аңлату, ныгыту, кабатлау һәм аны тагын да тирәнтенрәк үзләштерү өчен файдаланырга мөмкин булган мәсьәлә һәм сорауларны эченә ала.

Ярдәмлектә исәпләүгә, төзүгә, исбатлауга мәсьәләләр бирелде. Укучыларның логик фикерләүләрен үстерә торган, аларга чын (дөрес) һәм ялган әйтелмәләр, туры һәм кире теоремалар, кирәкле һәм җитәрлек шарт, үзлек һәм билге кебек төшенчәләрне үзләштерергә ярдәм итәрдәй биремнәр аеруча зур игътибар белән сайланды. Укучыларда пространство күзаллауларын үстерү максаты белән бирелгән мәсьәләләр, күнегүләр һәм сораулар да күп. Шулай ук практик эчтәлекле мәсьәләләр дә кертелде.

Ярдәмлектә геометрик мәсьәләләрне чишүдә барлык төр геометрик үзгәртүләрне (күчү һәм охшашлыкны), аларның композицияләрен куллануга авырлык дәрәҗәсе төрлечә булган мәсьәләләр, шулай ук векторлар алгебрасы аппаратын куллануга мәсьәләләр урнаштырылды.

Җыентыкның икенче кисәге авыррак мәсьәләләрне һәм шулай ук чишкәндә стандарт булмаган алымнар таләп итүче мәсьәләләрне үз эченә ала. Бу кисәктәге материал класстан тыш эшләр, факультатив занятиеләр, математика белән кызыксынучы укучыларга индивидуаль эшләр өчен файдаланырга тәкъдим ителә.

Ярдәмлектә кулланылган терминология һәм тамгаланышлар сигезьеллык мәктәптә кабул ителгән төшенчәләр һәм символика системасы белән тулысынча туры килә. Шулай да аерым очракларда „конгруэнт кисемтәләр“ һәм „конгруэнт почмаклар“ димичә, „тигез кисемтәләр“, „тигез почмаклар“ дип әйтелгән урыннар бар. Ләкин сөйләмдәге мондый „иреклелек“ аңлашылмаучылыкка китерергә тиеш түгел, чөнки „тигез“ сүзеннән без кисемтә озынлыкларының һәм почмак зурлыкларының тигезлеген аңлыйбыз, ә бу, үз чиратында, аларның конгруэнтлыгын китереп чыгара. Әгәр дә инде „өчпочмакның ягы“ термины кулланыла икән, өчпочмакның ягы яки озынлыгы турында сүз барганлыгы мәсьәләнең эчтәлегеннән (контексттан) аңлашыла. Мәсьәләләрдә ике, өч нокта һәм аннан да күбрәк ноктал бирелгән

булса, ул вакытта нокталар төрле дип карала, һәм мәсьәлә чишүгә күрсәтмәләрнең күбесендә шушы гомуми очрак күз алдында тотыла да. Шулай да укытучы мәсьәләгә тикшерү характерын бирергә теләгәндә, укучылардан мөмкин булган аерым очракларның барысын да карауларын таләп итә ала.

Китап ахырында җаваплар, мәсьәләне чишүгә күрсәтмәләр, ә кайбер очракларда мәсьәләнең тулысынча чишелеше китерелгән.

Мәсьәләләр җыентыгын, бигрәк тә аның икенче кисәген, югары классларда да планиметрия курсын кабатлаганда, түгәрәк һәм факультатив занятиеләрендә файдаланырга мөмкин.

IV һәм V бүлекләргә мәсьәләләр, аларга җавап һәм күрсәтмәләр И. С. Герасимова тарафыннан хәзерләнде.

Авторлар әлеге җыентыкның рецензентлары: Ю. П. Дудницин, Б. М. Ивлев һәм Г. Б. Кузнецовага файдалы киңәшләре һәм тәкъдимнәре өчен үзләренең рәхмәтләрен белдерәләр.

Авторлар.

I бүлек ГЕОМЕТРИЯДӘН БАШЛАНГЫЧ ТӨШЕНЧӘЛӘР

§ 1. КЕРЕШ

Ераклыклар

1. Түбәндәге таләпләр үтәлерлек итеп, өч нокта: X, Y, Z нокталары төзергә мөмкинме:

а) $|XY|+|YZ|=|XZ|$, $|XZ|-|XY|>|YZ|$;

б) $|XZ|-|XY|=|YZ|$, $|XY|+|YZ|\geqslant|XZ|$;

в) $|XY|+|YZ|>|XZ|$, $|XY|-|XZ|=|YZ|$?

Төзергә мөмкин булган очраклар өчен рәсемен ясагыз.

2. A пунктыннан B пунктына кадәр ераклык 20 км, ә B пунктыннан C пунктына кадәр 12 км.

а) A пунктыннан C пунктына кадәр ераклыкның күпме булуы мөмкин?

б) Бу ераклык мөмкин булган кыйммәтләренең иң зурысын яки иң кечкенәсен алган очрак өчен, 1 км ераклыкны 1 см дип алып, рәсемен ясагыз.

3. Күчмә өч радиостанция, бер-берсеннән ераклыклары 10 км дан артмаганда, үзара элемтә тота алалар. Бу радиостанцияләрнең икесе A һәм B пунктларында урнашкан. Аларның арасы 9 км. 1 км ны 1 см дип алып, рәсемдә A һәм B нокталарын билгеләгез һәм шул рәсемдә өченче радиостанция:

а) әлеге радиостанцияләрнең һәркайсы белән элемтә тотарлык булган;

б) әлеге радиостанцияләрнең берсе белән генә булса да элемтә тотарлык булган нокталарны билгеләгез.

4. Тау кичкәндә, ераклык кайвакыт бер пункттан икенче пунктка бару өчен сарыф ителгән вакыт белән үлчәнә. Мондый „ераклыклар“ өчен ераклыкның барлык үзлекләре дә үтәлерме?

5. $r_1>r_2$ булган (O_1, r_1) һәм (O_2, r_2) әйләнәләре бирелгән. Бу әйләнәләрнең

а) уртак ноктасы булганда;

б) ике уртак ноктасы булганда;

в) уртак нокталары булмаганда, (O_1O_2) ераклыгының күпмегә тигез булуы мөмкин?

Геометрик фигуралар

6. AB кисемтәсе бирелгән. Бу кисемтәнең

а) $|AX|<|AB|$; б) $|AX|=|BX|$; в) $|AX|\leqslant\frac{|AB|}{2}$; г) $|AX|\neq$

$\neq |BX|$ шарты үтәлгән барлык X нокталары күплеге нинди фигура төзи?

7. (O, r) әйләнәсе бирелгән. Яссылыкның:

а) $|OX| < r$; б) $|OX| > r$; в) $|OX| \geqslant r$; г) $0 < |OX| \leqslant r$ шарты үтәлгән барлык X нокталары күплеге нинди фигура төзи?

8. a турысы (O, r) әйләнәсен A һәм B нокталарында кисеп үтә. Бу турының

а) $|OX| = r$; б) $|OX| \leqslant r$; в) $|OX| < r$; г) $|OX| \geqslant r$;

д) $|OX| > r$; е) $|OX| \neq r$ шарты үтәлгән барлык X нокталары күплеге нинди фигура төзи?

9. (O_1, r_1) һәм (O_2, r_2) әйләнәләре A һәм B нокталарында кисешәләр $(r_1 \neq r_2)$. Рәсемдә яссылыкның

а) әйл. $(O_1, r_1) \cup$ әйл. (O_2, r_2);
б) әйл. $(O_1, r_1) \cap$ әйл. (O_2, r_2);
в) түг. $(O_1, r_1) \cup$ түг. (O_2, r_2);
г) түг. $(O_1, r_1) \cap$ түг. (O_2, r_2);
д) түг. $(O_1, r_1) \cup$ әйл. (O_2, r_2)

булган нокталары күплеген күрсәтегез.

10. (O_1, r_1) һәм (O_2, r_2) әйләнәләренең ике уртак ноктасы бар. Алар P һәм T нокталары $(r_1 \neq r_2)$. Рәсемдә яссылыкның:

а) $|O_1X| < r_1$, $|O_2X| < r_2$; б) $|O_1X| \geqslant r_1$, $|O_2X| \geqslant r_2$;

в) $|O_1X| + |O_2X| > |O_1O_2|$ шарты үтәлгән барлык X нокталары күплеген күрсәтегез.

11. Ике нокта[1]: A һәм B бирелгән. Рәсемдә яссылыкның:

а) $|BX| - |AX| = |AB|$; в) $|AX| + |BX| \leqslant |AB|$
б) $|AX| - |BX| = |AB|$;

шарты үтәлгән барлык X нокталары күплеген күрсәтегез.

12. а) Почмак һәм ярымъяссылыкның; б) ике почмакның; в) ике өчпочмакның; г) өчпочмак һәм кабарынкы дүртпочмакның уртак кисәге нинди n-почмакларны китереп чыгарырга мөмкин?

13. (O_1, r_1) һәм (O_2, r_2) түгәрәкләре бирелгән, анда $|O_1O_2| < r_1 + r_2$. Бу түгәрәкләрнең уртак кисәге кабарынкы фигура икәнен исбатлагыз.

14. F_1 һәм F_2 кабарынкы фигуралары бирелгән. $F_1 \cap F_2$ фигурасының кабарынкы икәнен исбатлагыз.

15. а) Туры һәм әйләнә; б) өч туры; в) почмак һәм әйләнә; г) өч әйләнә яссылыкны үзләренең чикләреннән үзгә уртак нокталары булмаган иң күбе төрле ничә кисәккә бүлә ала?

---

[1] Монда һәм алга таба да „ике нокта“, „өч нокта“ („өч туры“ h. б.) турында сүз барганда, бу нокталарны (турыларны h. б.) төрле нокталар дип уйларбыз.

§ 2. ФИГУРАЛАРНЫҢ КОНГРУЭНТЛЫГЫ ҺӘМ КҮЧҮЛӘР

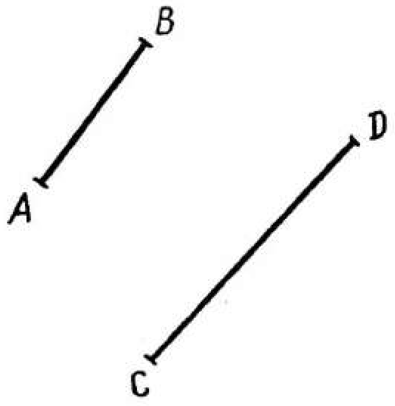
Фигураларны чагылдыру

1. Ике пар нокта: {*A*; *B*} һәм {*C*; *D*} бирелгән булсын. Әлеге нокталар парының берсен икенчесенә чагылдырыгыз. Бер парның икенчесенә ничә төрле чагылдыруын төзеп була? Килеп чыккан чагылдырулар кайтмамы?

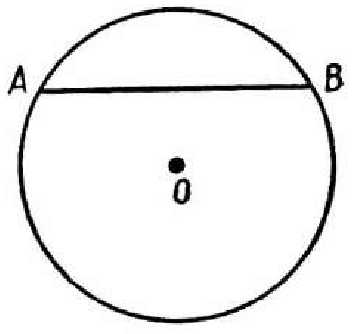
2. Нинди дә булса ысул белән чагылдырыгыз: а) *AB* кисемтәсен *CD* кисемтәсенә (1 нче рәсем); б) әйләнәне үзенә концентрик әйләнәгә; в) хорданы шул хорда белән тартылып торган әйләнә дугасына (2 нче рәсем); г) нурны үзенә параллель нурга (нурларның үзара урнашуының төрле очракларын карагыз); д) турыны үзенә параллель турыга; е) турыпочмаклы өчпочмакның катетын гипотенузасына. Килеп чыккан чагылдырулар кайтмамы?

3. Ике ноктадан торган күплекне бер ноктадан торган күплеккә ничә ысул белән чагылдырып була? Бу чагылдыру кайтмамы? Фигураларның кайтма булмаган чагылдыруларына мисаллар китерегез.

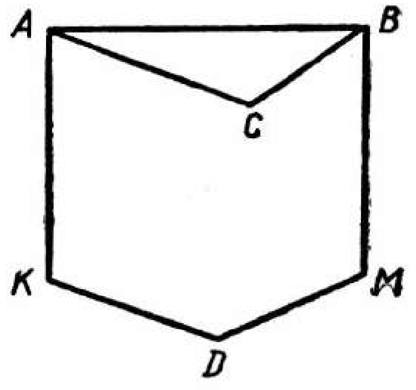
4. *ABC* өчпочмагы һәм *AKDMB* сынык сызыгы бирелгән, өстәвенә $[AK] \perp [AB]$ һәм $[BM] \perp [AB]$ (3 нче рәсем). *ABC* өчпочмагын *KD* һәм *DM* кисемтәләренең берләшмәсенә чагылдырып буламы? Килеп чыккан чагылдыру кайтмамы? Шул ук ысул белән *ABC* өчпочмагын *AKDMB* сынык сызыгына чагылдырып буламы?



1 нче рәсем



2 нче рәсем



3 нче рәсем

5. Өч элементтан торган күплекне 1, 2, 3 элементтан торган күплеккә ничә төрле ысул белән чагылдырырга мөмкин? Бу күплекне дүрт элементтан торган күплеккә чагылдырып буламы?

Күчүләр

6. а) Нокта; б) нокталар пары; в) кисемтә; г) нур; д) туры; е) әйләнә; ж) түгәрәк; з) почмак күчкәндә, нинди фигурага чагыла?

7. Күчү ул яссылыкның кайтма чагылдыруы икәнен һәм аңа кире чагылдыруның шулай ук күчү булуын исбатлагыз.

8. Фигураларның тиңдәшле нокталары арасындагы ераклыклар сакланган чагылдыруга мисаллар китерегез. Бу чагылдыруларны күчү дип исәпләргә ярыймы?

Бору[1]

9. 1) Борганда яссылыкның нинди нокталары үзенә чагыла?
2) Теләсә нинди боруда үзенә чагыла торган фигураларны атагыз.

10. а) Туры; б) нур; в) кисемтә; г) әйләнә; д) өчпочмак; е) дүртпочмак үзенә чагылдырыла торган бору почмакларын күрсәтегез.

11. Борганда AB кисемтәсе A_1B_1 кисемтәсенә чагылдырылган булса, бору почмагының AB һәм A_1B_1 турылары арасындагы почмакка тигез икәнен исбатлагыз.

12. Кисешүче турылар парын нинди бору белән үзенә чагылдырып була?

13. Өч туры, үзара 60° лы алты почмак төзеп, бер ноктада кисешәләр. Бирелгән турыларны нинди борулар белән үзләренә чагылдырырга мөмкин?

14. Ике конгруэнт әйләнә бирелгән. Нинди бору белән аларның берсен икенчесенә чагылдырып була?

15. Төзек бишпочмаклы йолдызны нинди бору белән үзенә чагылдырып була?

16. Ике әйләнә бирелгән. 45° ка борганда бу әйләнәләрнең берсе икенчесенә чагыла. Бору үзәген төзегез.

17. Конгруэнт AB һәм A_1B_1 кисемтәләре бирелгән. A ноктасын A_1 ноктасына, B ноктасын B_1 ноктасына чагылдыра торган бору үзәге M ны төзегез. Мондый бору үзәген һәрвакытта да табып буламы?

18. a турысы өстендә — A ноктасы, b турысы өстендә B ноктасы бирелгән. A ноктасы B ноктасына туры килерлек итеп, бору юлы белән, a турысын b турысына чагылдырыгыз.

19. Ике конгруэнт әйләнәнең үзәкләре — O_1 һәм O_2 нокталары. Бу әйләнәләр өстендә тиңдәшле рәвештә A_1 һәм A_2 нокталары бирелгән. Нинди бору белән бер әйләнәне икенчесенә A_1 ноктасы A_2 ноктасына туры килерлек итеп чагылдырып була?

Үзәкле симметрия

20. Түбәндәге фигураларның симметрия үзәген төзегез: а) нокталар парының: б) ике конгруэнт почмакның (нинди очракларда бу мәсьәләнең чишелеше булуы мөмкин?); в) ике конгруэнт әйләнәнең (мөмкин булган барлык очракларны тикшере-

---

[1] VI класс геометрия дәреслегендә 0° тан 180° лы почмакка ике юнәлештә бору карала: сәгать йөреше уңаена һәм сәгать йөрешенә каршы. Фикер йөртергә җиңелрәк булсын өчен, түбәндә китерелгән мәсьәләләрне бер очрак өчен — сәгать йөреше уңаена бору очрагы өчен генә чишегез.

гез); г) ике конгруэнт өчпочмакның (нинди очракларда аларның үзәк симметрияле булуы мөмкин?).

21. Туры өстендә конгруэнт AB һәм A_1B_1 кисемтәләре бирелгән. $\Phi = [AB] \cup [A_1B_1]$ булган Φ фигурасының симметрия үзәген төзегез.

22. Теләсә нинди ике кисемтәне үзәк симметрияле дип исәпләргә мөмкинме?

23. Түгәрәк эчендә яткан нокта аша, әлеге нокта белән урталай бүленерлек итеп, хорда үткәрегез.

24. Үзәк симметрияле алтыпочмак төзегез.

25. Түбәләре сызымда урнашып бетмәгән параллелограмм бирелгән. Шул параллелограммның симметрия үзәген төзегез.

Күчәрле симметрия

26. Күчәрле симметриягә билгеләмә бирегез. Күчәрле симметриядә яссылыкның нинди ноктолары үзенә чагыла?

27. Күчәрле симметриядә нинди фигуралар үзенә чагыла?

28. Нинди очракта өчпочмакның симметрия күчәре була? Өчпочмакның бердән артык симметрия күчәре булуы мөмкинме?

29. Өчпочмакның ике симметрия күчәре булса, аның өченче күчәре дә барлыгын исбат итегез.

30. Дүртпочмакның ничә симметрия күчәре булуы мөмкин?

31. Рус алфавитының кайсы хәрефләре симметрия күчәрләренә ия?

32*. Түбәсе сызымда урнашмаган почмак бирелгән. Зурлыгын шул почмактан ике тапкыр зуррак итеп почмак төзегез.

33*. D түбәсе сызымда урнашмаган почмак һәм ирекле M ноктасы (M сызым эчендә) бирелгән. D түбәсе аша үтәрлек итеп, M ноктасыннан туры үткәрегез.

34. Түбәләре янына килеп булмаган ике почмакның шул түбәләре арасын, күчәрле симметриядән файдаланып, ничек үлчәргә?

35. a белән b турысы һәм l күчәренә карата шул турыларга симметрияле булган a_1 белән b_1 турысы арасындагы почмакларның зурлыклары тигез икәнен исбатлагыз.

36. p турысы һәм шул турыдан төрле якта A һәм B ноктолары бирелгән. p турысы өстендә A һәм B ноктоларыннан ераклыкларының аермасы иң зур булган M ноктасын табыгыз.

37. Конгруэнт AB һәм CD кисемтәләре бирелгән. Эзлекле рәвештә үтәлгән күчәрле нинди ике симметрия AB кисемтәсен CD кисемтәсенә чагылдыра?

38. Үзара перпендикуляр m, n турылары һәм $M_1 = S_m(M)$, $M_2 = S_n(M)$ ноктолары бирелгән. M_1 һәм M_2 ноктоларының үзәк симметрияле икәнен исбатлагыз.

39. Күчәрле симметрия тиңдәшле ноктоларның ничә пары белән билгеләнә?

40. Күчәрле симметрия тиңдәшле турыларның ничә пары белән бирелә?

41. а) Бер симметрия күчәре булган; б)* ике симметрия күчәре булган бишпочмак төзегез.

42. Кисешүче ике туры бирелгән. Нинди күчәр симметриясе белән аларның берсе икенчесенә чагылдырыла? Нинди күчәр симметриясендә ике параллель турының берсе икенчесенә чагыла?

43. Күчәрле ике симметриянең тиңдәшле нокталарының уртак парлары булуы мөмкинме?

44. Бирелгән ике турыны бер үк зурлыктагы почмаклар ясап кисәрлек итеп, бирелгән нокта аша туры үткәрегез.

45. Ягы, калган ике ягының аермасы һәм беренче як белән калган ике ягының зурраты арасындагы почмагы буенча өчпочмак төзегез.

46. Ике ягы һәм шул якларга каршы ятучы почмакларының аермасы буенча өчпочмак төзегез.

47. Кысынкы почмак эчендә M ноктасы бирелгән. A һәм B түбәләре әлеге почмакның яклары өстендә яткан иң кечкенә периметрлы MAB өчпочмагы төзегез.

48. Конгруэнт булмаган ике кисемтәнең берләшмәсе булган һәм ике симметрия күчәрле фигура төзегез.

49. Уртак нокталары булмаган ике конгруэнт кисемтәнең берләшмәсе булган һәм ике симметрия күчәрле фигура төзегез.

50. а) Һәркайсы икенчесенең үзәге аша үтүче ике әйләнәнең берләшмәсе булган; б) (O, r) түгәрәге белән үзәге (O, r) әйләнәсе өстендә яткан әйләнәнең берләшмәсе булган фигураның ничә симметрия күчәре бар?

51. Бер генә симметрия күчәрле һәм ул күчәр BD турысы булган кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагы төзегез.

52. BD күчәренә симметрияле итеп, кабарынкы булмаган $ABCD$ дүртпочмагы төзегез.

53. Фигура әйләнә белән турының берләшмәсеннән гыйбарәт. Бу фигурада ничә симметрия күчәре булуы мөмкин?

54. A һәм B нокталары бирелгән.

1) $|AX| < |BX|$; 3) $|BX| < |AX|$; 5) $|AX| \neq |BX|$

2) $|AX| \leqslant |BX|$; 4) $|BX| \leqslant |AX|$;

шарты үтәлгән барлык нокталар күплеге X нинди фигура төзи?

55. Симметрия күчәре l һәм (O, r) әйләнәсе бирелгән, монда $O \notin l$. Әйл. $(O_1, r) = S_l$ (әйл. (O_1, r)) булырлык итеп, циркуль ярдәмендә (O_1, r) әйләнәсе төзегез.

56. Симметрия күчәре l, A ноктасы һәм $A \neq B$ булган $B = S_l(A)$ ноктасы бирелгән. Яссылыкта $C \notin l$ ноктасы билгеләгез һәм линейка ярдәмендә $D = S_l(C)$ ноктасы төзегез.

57. Симметрия күчәре l һәм $A = S_l(A)$, $X \notin l$, $Y = S_l(X)$, $P \in [AY)$, $Z = S_l(P)$ нокталары бирелгән. $[PY)$, $[AP]$, $[AZ)$, $[AX]$, $[ZX]$, $[PY]$ фигураларының кайсылары l чикле бер үк ярымъяссылыкта ята?

58. а) Дүрт конгруэнт әйләнәнең берләшмәсе булган һәм дүрт симметрия күчәрле;

б) өч әйләнәнең берләшмәсе булган һәм чиксез күп симметрия күчәрле;

в)* өч әйләнәнең берләшмәсе булган һәм ике һәм бары тик ике генә симметрия күчәренә ия булган фигура төзегез.

59*. Үзара кисешүче дүрт түгәрәкнең уртак кисәгеннән торган һәм дүрт симметрия күчәренә ия булган фигура төзегез.

60. Уртак нигезле төрле яклы дүрт өчпочмакның берләшмәсе булган һәм ике симметрия күчәрле фигура төзегез. Бу өчпочмакларның уртак кисәге нинди күппочмак була һәм аның ничә симметрия күчәре бар?

61. Диагонале симметрия күчәре өстендә яткан кабарынкы бишпочмак төзергә мөмкинме? Җавапны нигезләргә.

62. Түбәләр саны так булган кабарынкы күппочмак симметрия күчәренә ия булса, аның бер генә диагонале дә симметрия күчәре белән тәңгәл килмәвен исбатлагыз.

§ 3 ПАРАЛЛЕЛЬЛЕК һӘМ ПАРАЛЛЕЛЬ КҮЧЕРҮ

Параллельлек һәм үзәкле симметрия

1. AB турысы һәм аннан читтә M ноктасы бирелгән. M ноктасына карата үзәкле симметриядә AB турысының образын төзегез. Ике параллель туры төрле ничә симметрия үзәгенә ия?

2. Турыларның параллельлеге түбәндәге үзлекләргә ия икәнен исбатлагыз; 1) $a \| a$; 2) әгәр $a \| b$ булса, ул вакытта $b \| a$; 3) әгәр $a \| b$; $b \| c$ булса, ул вакытта $a \| c$.

3. Циркуль һәм линейка ярдәмендә туры почмакны өч конгруэнт почмакка бүлегез.

4. Бер-берсеннән d ераклыкта ике параллель туры бирелгән. Яссылыкның:

а) бу турыларга кадәр ераклыклар суммасы даими c зурлыгына тигез булган;

б) бу турыларга кадәр ераклыклар аермасы даими c зурлыгына тигез булган барлык нокталары күплеген табыгыз.

5. Яссылыкта кисешүче ике туры: a һәм b бирелгән. a һәм b турыларына кадәр ераклыклары аермасы бирелгән p зурлыгына тигез булган нокталар күплеге нәрсәдән гыйбарәт?

6. Өч ягы: a, b, c һәм дүртенче як янындагы ике почмагы буенча дүртпочмак төзегез.

7. $ABCD$ сынык сызыгында AB, BC, CD буыннарының озынлыклары тигез һәм $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, BC һәм AD турыларының параллель икәнен исбатлагыз.

Юнәлешләр. Өчпочмакның почмаклары суммасы. Турыларның параллельлек билгеләре

8. Яссылыкта төрле ничә юнәлеш бар?

9. а) Ике нокта; б) өч нокта; в) дүрт нокта яссылыкта төрле ничә юнәлешне бирә? Бу нокталар үзара урнашырга мөмкин булган барлык очракларны тикшерегез.

10. Яктылык нурының яссы көзге AB дан кайтарылу почмагы BNP аның көзгегә төшү почмагы MNA га тигез (4 нче рәсем). Әгәр яссылыкта үзара перпендикуляр итеп ике көзге куелган булса, бу көзгеләр белән төзелгән туры почмак эченә юнәлтелгән (почмак түбәсе аша үтмәүче) теләсә нинди нур, көзгеләрнең һәркайсыннан бер тапкыр кайтарылганнан соң, үзенең юнәлешен капма-каршыга үзгәртә. Шуны исбатлагыз.

11*. Теләсә нинди ABC өчпочмагында:

а) A почмагының биссектрисасы шул ук түбәдән үткәрелгән биеклек белән $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ зурлыгындагы почмак төзегәнлеген;

б) B һәм C почмакларының биссектрисалары $\frac{\hat{A}}{2}+90°$ зурлыгындагы почмак төзегәнлеген;

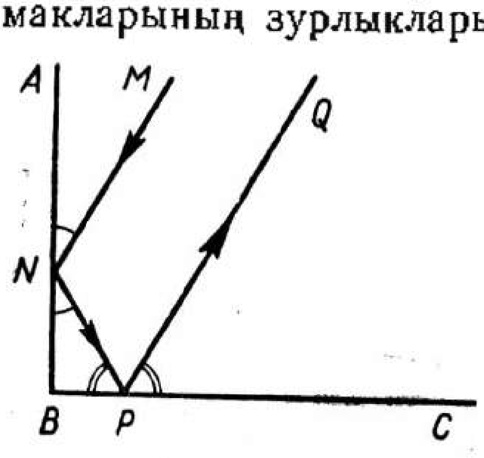
в) B һәм C тышкы почмакларының биссектрисалары $\frac{\hat{A}}{2}$ зурлыгындагы почмак төзегәнлеген исбатлагыз.

12. α һәм β — өчпочмакның ике почмагы. Бу почмакларның биссектрисалары арасындагы почмакны исәпләп чыгарыгыз.

13. Өчпочмакның ике почмагының биссектрисалары үзара перпендикуляр булуы мөмкинме?

14. Турыпочмаклы өчпочмакның кысынкы почмагы 30°, ә гипотенузасы 32 см. Туры почмак түбәсеннән үткәрелгән биеклек гипотенузаны ике кисемтәгә бүлә. Шул кисемтәләрнең озынлыкларын исәпләп чыгарыгыз.

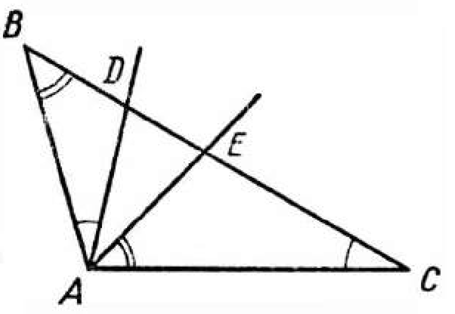
15. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы аның бер катетыннан ике тапкырга озынрак. Бу өчпочмакның кысынкы почмакларының зурлыклары күпмегә тигез?



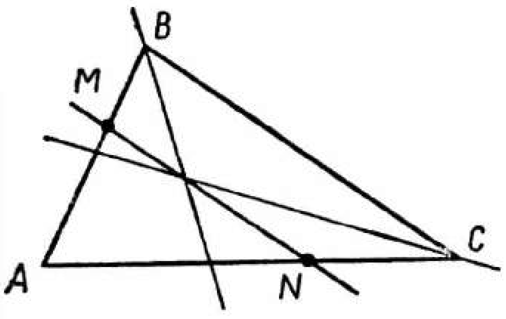
4 нче рәсем

16. Бирелгән ABC өчпочмагында A ноктасыннан BC ягына AD һәм AE турылары үткәрелгән (5 нче рәсем). Аларның берсе $[AB]$ белән $\hat{C}$ почмагына конгруэнт почмак, икенчесе $[AC]$ белән $\hat{B}$ почмагына конгруэнт почмак төзи. ADE өчпочмагының тигезъянлы икәнен исбатлагыз.

17. Периметры p, бер почмагы α һәм биеклеге h буенча өчпочмак төзегез.



5 нче рәсем



6 нчы рәсем

18. Тигезьянлы өчпочмакның түбәсе аша нигезенә параллель итеп үткәрелгән туры анын шул түбә янындагы тышкы почмагының биссектрисасы икәнен исбатлагыз.

19. ABC өчпочмагы бирелгән (6 нчы рәсем). B һәм C почмаклары биссектрисаларының кисешү ноктасы аша $[BC]$ нә параллель, ә $[AB]$ һәм $[AC]$ ләрен тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталарында кисеп үтәрлек итеп, MN турысы үткәрелгән. $|MN| = |BM| + |CN|$ икәнен исбатлагыз.

Параллель күчерү. Фалес теоремасы. Өчпочмакның урта сызыгы.

20. Параллель күчерүнең күчү икәнен исбатлагыз. Параллель күчерү турыны нинди фигурага чагылдыра?

21. а) Ике нокта; б) өч нокта; в) дүрт нокта ничә төрле параллель күчерүне бирә?

22. Нинди параллель күчерү әйләнәне үзенә конгруэнт әйләнәгә чагылдыра? Нинди очракта параллель күчерү ярдәмендә кисемтәне кисемтәгә чагылдырып була?

23. Нинди фигураларны параллель күчерү юлы белән үзенә чагылдырырга мөмкин?

24. Түбәсен турыдан-туры үлчәргә мөмкин булмаган почмакның зурлыгын табыгыз.

25. $ABCD$ дүртпочмагында $(BC) \parallel (AD)$ һәм $|AC| = |BD|$. $|AB| = |CD|$ икәнен исбатлагыз.

26. p һәм q параллель турылары өченче туры s белән кистерелгән. Түбәләре p, q һәм s турылары өстендә ятарлык итеп, ягы бирелгән озынлыкта булган тигезьяклы өчпочмак төзегез.

27. Ике ягы һәм шул якларга каршы яткан почмакларының аермасы буенча өчпочмак төзегез.

28. ABC тигезьянлы өчпочмагында $|AB| = |AC|$, ә түбә янындагы почмагы 30°. BC ягы өстендәге нинди дә булса ноктадан өчпочмакның калган ике ягына кадәрге ераклыклар суммасын табыгыз.

29. Кабарынкы дүртпочмакта капма-каршы якларының урталарын тоташтыручы кисемтә калган ике ягының ярымсуммасына тигез булса, дүртпочмакның капма-каршы ятучы бу яклары параллель икәнен исбатлагыз.

30. Сызымда өчпочмак якларының урталары булган өч нокта сакланып калган. Бу өчпочмакны яңадан ничек төзергә?

31. Өчпочмакның яклары a һәм b га тигез. Өченче ягының уртасы аша бирелгән якларга параллель турылар үткәрелгән. Килеп чыккан дүртпочмакның периметрын табыгыз.

32. A_1 ноктасы A ноктасына M ноктасына карата симметрик, ә A_2 ноктасы A_1 ноктасына C ноктасына карата симметрик. $|AA_2| = 2|MC|$ һәм $[AA_2] \parallel [MC]$ икәнен исбатлагыз.

33. Тигезьянлы өчпочмакта нигезенең теләсә кайсы ноктасыннан аның ян якларына кадәр ераклыклар суммасы өчпочмак түбәләренең берсеннән аның ян ягына кадәр ераклыкка тигез икәнен исбатлагыз.

34. Ике параллель күчерүне эзлекле рәвештә үтәү нинди очракта бердәй чагылдыру була?

35*. M_1, M_2, M_3 нокталары — ABC өчпочмагында AB, BC, CD якларының урталарына карата үзәкле симметриядә M ноктасының образлары. ABC һәм $M_1M_2M_3$ өчпочмакларының конгруэнт икәнен исбатлагыз.

36*. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары O ноктасына карата симметрияле. Бу өчпочмак медианаларының кисешү нокталары M һәм M_1 O ноктасына карата симметрияле икәнен исбатлагыз.

II бүлек КҮППОЧМАКЛАР

§ 1. КҮППОЧМАК БИЛГЕЛӘМӘСЕ

Гади йомык сынык сызык. Күппочмак

1. *D* белән *K* нокталары һәм *E* белән *T* нокталары күппочмакның бер үк (эчке яки тышкы) өлкәсенә керәләрме (7 нче рәсем)?

2. *ABCDEF* йомык сынык сызыгы төзегез (8 нче рәсем). Аннары очлары *M* һәм *P* нокталарында яткан һәм *ABCDEF* сынык сызыгын кисмәүче нинди дә булса сынык сызык үткәрегез.

3. 1) а) Дүртпочмакның; б) бишпочмакның; в) алтыпочмакның; г) *n*-почмакның бер түбәсеннән ничә диагональ үткәрергә мөмкин?

2) Кабарынкы а) дүртпочмакның; б) бишпочмакның; в) алтыпочмакның; г) *n*-почмакның ничә диагонале бар?

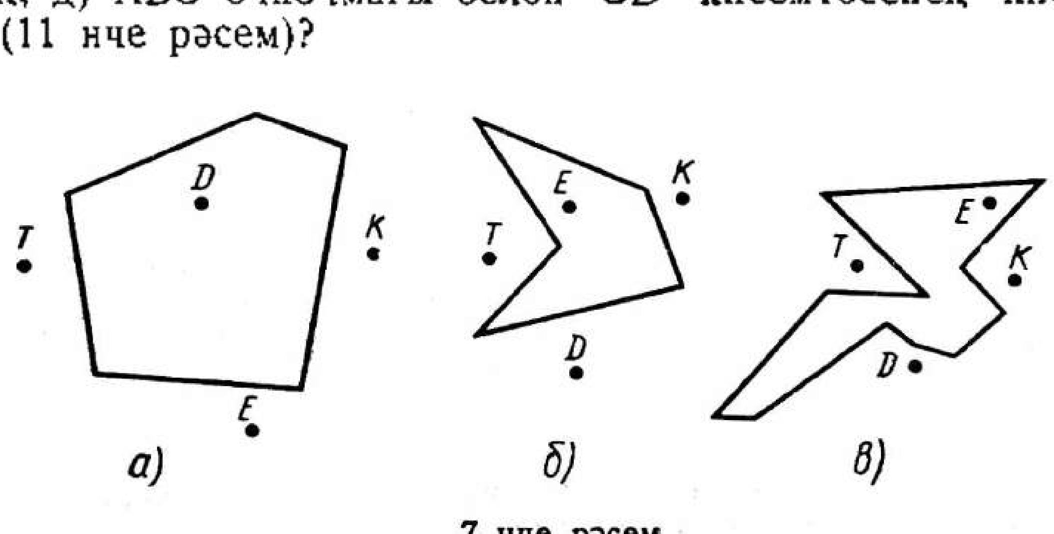
4. Түбәндәге фигураларның кайсылары кабарынкы: а) почмак; б) туры; в) нур; г) кисемтә; д) ярымъяссылык; е) яссылык; ж) өчпочмак; з) дүртпочмак?

5. а) 9 нчы рәсемдә ничә өчпочмак сурәтләнгән?

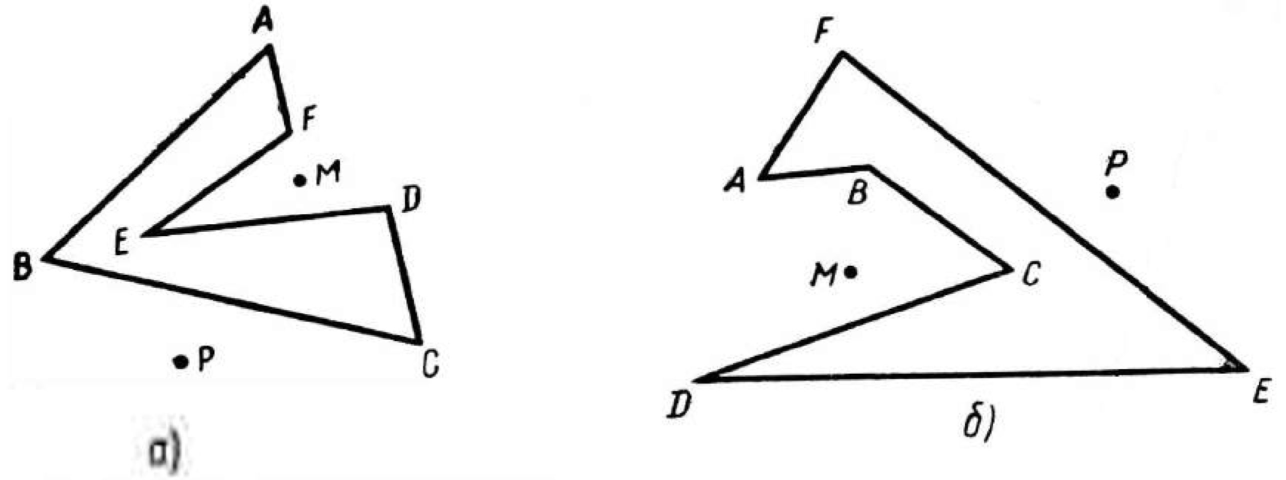
б) 10 нчы рәсемдә сурәтләнгән берничә күппочмакның исемен әйтегез.

6. Кайсы фигура: 1) *ABC* һәм *ACD* өчпочмакларының; б) *AED* һәм *ACD* өчпочмакларының; в) *ABCDE* бишпочмагы белән *ABC* өчпочмагының; г) *ABCD* һәм *ACDE* дүртпочмакларының берләшмәсе була (11 нче рәсем)?

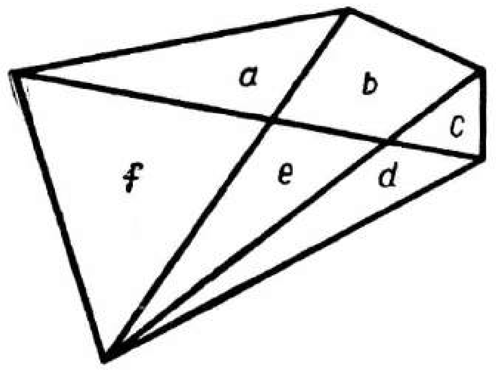
2) Кайсы фигура: а) *ABC* һәм *ADC* өчпочмакларының; б) *ABC* һәм *ADE* өчпочмакларының; в) *ABCDE* бишпочмагы белән *ACD* өчпочмагының; г) *ABCD* һәм *ACDE* дүртпочмакларының; д) *ABC* өчпочмагы белән *CD* кисемтәсенең кисешмәсе була (11 нче рәсем)?



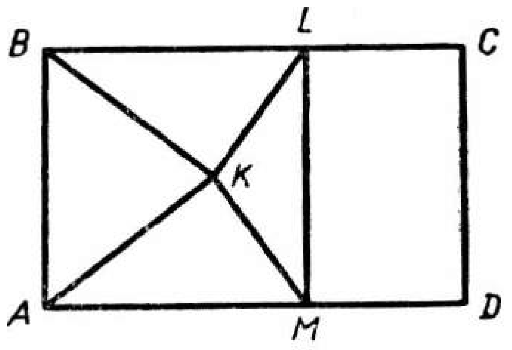
7 нче рәсем



8 нче рәсем



9 нчы рәсем



10 нчы рәсем

7. а) Бер түбәсеннән үткәрелгән диагональләр белән кабарынкы бишпочмак ничә өчпочмакка бүленә?

б) Бер түбәсеннән үткәрелгән диагональләр белән кабарынкы *n*-почмак ничә өчпочмакка бүленә?

8. Күппочмакның бер түбәсе янында төзелгән тышкы почмаклары конгруэнт икәнен исбатлагыз.

Күппочмакның почмаклары суммасы

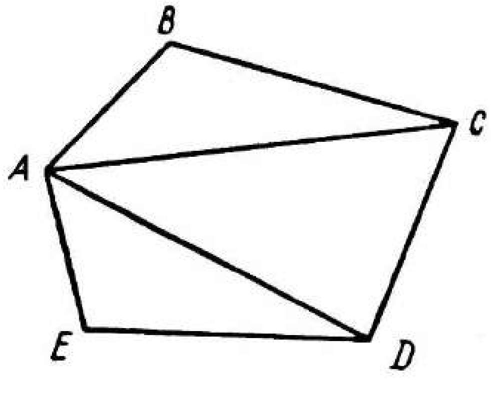
9. а) Кабарынкы булмаган дүртпочмакның; б) кабарынкы булмаган бишпочмакның барлык эчке почмаклары[1] суммасын исәпләп чыгарыгыз.

10. а) *ABCDE* күппочмагы *C* түбәсе аша үтүче *l* турысына карата симметрияле (12 нче рәсем), $\hat{A}=70°$, $\hat{C}=140°$. *B* почмагының зурлыгын исәпләп чыгарыгыз.

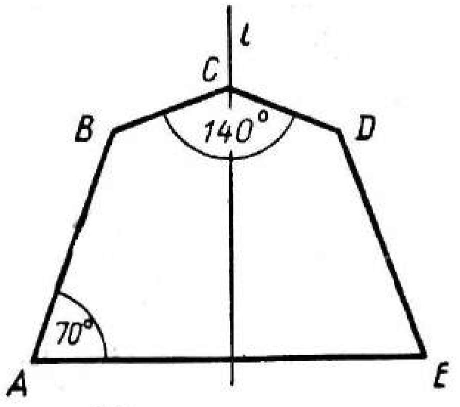
б) *KLMNPQ* күппочмагы *KN* турысына карата симметрияле. $\widehat{MNP}=60°$, $\widehat{LKQ}=\hat{L}=120°$ булганда, аның эчке почмаклары *M*, *P* һәм *Q* ның зурлыкларын исәпләп чыгарыгыз (13 нче рәсем).

11. Күппочмакның барлык эчке почмаклары белән бер тышкы почмагының суммасы 2250° ка тигез. Бу күппочмак ничә яклы?

[1] Монда һәм алга таба да күппочмакның эчке почмаклары дип аның почмагының зурлыгы, ә ягы дип ягының озынлыгы аталыр.



11 нче рәсем



12 нче рәсем

12. Кабарынкы күппочмакның барлык эчке почмаклары үзара тигез һәм тышкы почмаклары белән бер эчке почмагының суммасы 468° ка тигез булса, аның яклары санын исәпләп чыгарыгыз.

13. 1) а) Ике эчке почмагының биссектрисалары; б) ике түбәсеннән үткәрелгән биеклекләре үзара перпендикуляр булган өчпочмак бармы?

2) а) Ике биссектрисасы үзара перпендикуляр; б) ике биеклеге үзара перпендикуляр булган өчпочмак сызыгыз.

14. Кабарынкы күппочмакта иң күбе ничә кысынкы почмак булуы мөмкин?

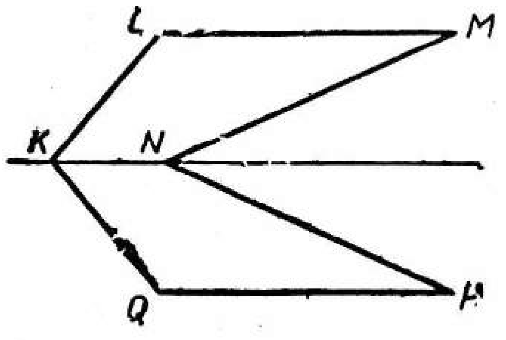
Күрсәтмә. Кабарынкы күппочмакның тышкы почмакларының суммасы үзлеген файдаланыгыз.

15. Кабарынкы дүртпочмакның бер үк ягы янындагы ике почмагының биссектрисалары арасындагы почмак әлеге дүртпочмакның калган ике почмагы ярымсуммасына тигез. Шуны исбатлагыз.

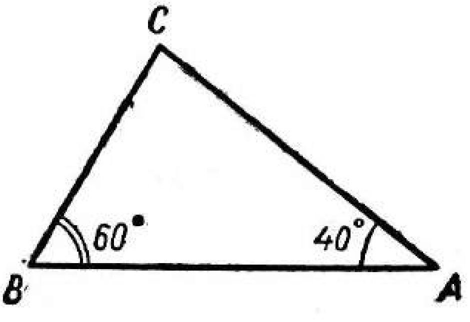
16. Кабарынкы дүртпочмакта кара-каршы ятучы почмакларның биссектрисалары төзегән почмакларының берсе белән әлеге дүртпочмакның калган ике почмагының ярымаермасы суммасы 180° ка тигез була. Шуны исбатлагыз.

Күрсәтмә. Дүртпочмакның эчке почмаклары суммасы үзлеген файдаланыгыз.

17. $[AB]\parallel[CD]$ һәм $[BC]\parallel[AD]$, $\hat{A}=26°$ булганда, $ABCD$ дүртпочмагының почмаклары зурлыкларын исәпләп чыгарыгыз.



13 нче рәсем



14 нче рәсем

§ 2. ӨЧПОЧМАКЛАР

Өчпочмак төзү

1. Түбәндәге бирелгәннәр буенча ABC өчпочмагы төзегез:

а) $a=4$ см, $b=5$ см, $c=6$ см;
б) $a=5$ см, $\beta=45^\circ$, $\gamma=60^\circ$;
в) $a=4$ см, $b=5$ см, $\gamma=60^\circ$;
г) $a=5$ см, $\beta=60^\circ$, $\alpha=45^\circ$;
д) $\alpha=60^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=75^\circ$.

Өчпочмакның яклары белән почмаклары арасындагы бәйләнешләр

2. а) $a=15$ см, $b=15$ см, $c=7$ см;
б) $a=10$ см, $b=8$ см, $c=8$ см;
г) $a=15$ см, $b=3$ см, $c=4$ см

булганда, ABC өчпочмагының иң зур почмагын күрсәтегез.

3. а) $\hat{A}=45^\circ$, $\hat{B}=67^\circ$; б) $\hat{A}=57^\circ$, $\hat{B}=74^\circ$; в) $\hat{A}=80^\circ$, $\hat{B}=$ $=68^\circ$ булганда, ABC өчпочмагының иң зур ягын күрсәтегез.

4. а) $\hat{A}=10^\circ$, $\hat{C}=78^\circ$; б) $\hat{C}=178^\circ$, $\hat{A}=1^\circ$ булганда, ABC өчпочмагының якларын озынлыклары кими бару тәртибендә языгыз.

5. $\hat{B}=67^\circ$, $\hat{C}=78^\circ$ булганда, ABC өчпочмагының якларын озынлыклары үсә бару тәртибендә языгыз.

6. Почмакларының 14 нче рәсемдә бирелгән кыйммәтләре буенча, өчпочмакның: а) кайсы ягы зуррак (AB яки AC) икәнен ачыклагыз; б) почмакларын зурлыклары арта бару тәртибендә язып чыгыгыз.

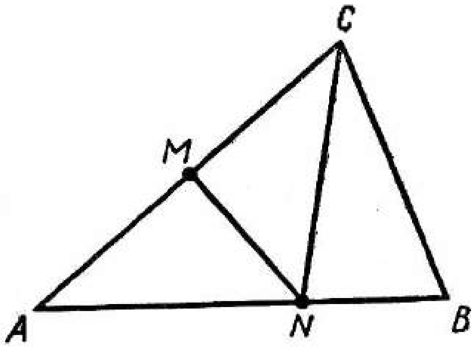
7. ABC өчпочмагы бирелгән (15 нче рәсем). AC ягының уртасы M аша аңа MN перпендикуляры үткәрелгән, $N\in[AB]$, $\widehat{CAN}=40^\circ$, $\widehat{NCB}=30^\circ$. а) $|AB|=a$, $|BC|=c$ булганда, BCN өчпочмагының периметрын исәпләп чыгарыгыз. б) ABC өчпочмагының төрен билгеләгез.

§ 3. ДҮРТПОЧМАКЛАР

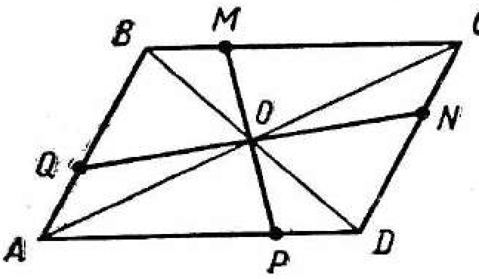
Параллелограмм билгеләмәсе

1. Өчпочмак белән шушы өчпочмакның кайсы да булса бер ягының уртасына карата әлеге өчпочмакка симметрияле икенче өчпочмакның берләшмәсе параллелограмм төзегәнлеген исбатлагыз.

2. Симметрия үзәге булган һәр дүртпочмакның параллелограмм икәнен исбатлагыз.



15 нче рәсем



16 нчы рәсем

3. Дүртпочмакта чиктәш ике якның һәркайсы янында яткан ике почмакның суммасы 180° ка тигез булса, мондый теләсә нинди дүртпочмакның параллелограмм икәнен исбатлагыз.

4. а) Параллелограмм якларының урталары аша аларга перпендикуляр турылар үткәрелгән. Бу турылар белән төзелгән дүртпочмакның төрен билгеләгез.

б) $ABCD$ параллелограммы бирелгән, монда $M \in [BC]$, $N \in$ $\in [CD]$, O — параллелограммның симметрия үзәге (16 нчы рәсем). AD һәм AB турыларын тиңдәшле рәвештә P һәм Q нокталарында кисеп үтүче MO һәм NO турылары үткәрелгән. M, N, P һәм Q — параллелограмм түбәләре икәнен исбатлагыз.

5. 1) Өч параллель туры өч параллель туры белән кистерелгән. Монда ничә параллелограмм килеп чыккан?

2) Дүрт параллель турыны дүрт параллель туры белән кистергәндә, ничә параллелограмм барлыкка килә?

3. n параллель турыны n параллель туры белән кистергәндә ничә параллелограмм барлыкка килә?

Параллелограммның үзлекләре

6. Параллелограммның периметры 30 см, ә параллелограммнан аның диагонале белән кистереп алынган өчпочмакның периметры 25 см. Бу диагональнең озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

7. Параллелограммның ягын аның периметры p һәм икенче ягы a аша күрсәтегез.

8. Параллелограммның чиктәш ике ягының суммасы 40 см, ә бер ягы 10 см. Параллелограммның икенче ягының озынлыгын һәм периметрын исәпләп чыгарыгыз.

9. Параллелограммның чиктәш ике ягының аермасы 10 см. Бу якларның берсе а) 6 см; б) 13 см булганда, параллелограммның икенче ягының озынлыгын һәм периметрын исәпләп чыгарыгыз.

10. Параллелограммның ике почмагының суммасы 100° ка тигез. Параллелограммның почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

11. Параллелограммның ике почмагының аермасы 10° ка тигез. Параллелограммның почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

12. Параллелограммның бер почмагының биссектрисасы аның якларының берсен a һәм b озынлыгындагы кисемтәләргә бүлә. Параллелограммның периметрын a һәм b аша күрсәтегез.

13. $ABCD$ параллелограммының AC һәм BD диагональләре O ноктасында кисешәләр. ABO өчпочмагы COD өчпочмагына чагылдырыла торган күчүне күрсәтегез.

14. а) $ABCD$ дүртпочмагында $|AD|=|BC|$, $|AB|=|DC|$. MN кисемтәсе ($M\in[DC]$, $N\in[AB]$) AC кисемтәсен урталай бүлә, $[AC]\cap[NM]=K$. $|MK|=|KN|$ икәнен исбатлагыз.

б) Алдагы мәсьәлә шартында бирелгән A, B, C һәм D нокталарының бер яссылыкта ятмавы мөмкинме? Шуны тикшерегез.

15. Параллелограммның бер почмагы 45° ка тигез. Параллелограммның җәенке почмак түбәсеннән үткәрелгән биеклеге 4 см га тигез һәм ул параллелограммның ягын конгруэнт ике кисемтәгә бүлә. а) Бу якның озынлыгын; б) параллелограммның шул ук түбәсеннән үткәрелгән диагонале белән яклары арасында төзелгән почмакларын табыгыз.

16. Параллелограмм диагонале белән тигезьянлы турыпочмаклы ике өчпочмакка бүленә; параллелограммның зуррак ягы a га тигез. Параллелограммның шул якка үткәрелгән биеклеген a аша күрсәтегез.

17. Параллелограммның бер үк түбәсеннән үткәрелгән биекләре үзара а) 25° лы; б) 125° лы почмак төзесәләр, аның почмакларын исәпләгез.

18. 3 һәм 5 см га тигез булган ике ягы һәм 2 см лы биеклеге буенча параллелограмм төзегез. (Ике чишелеш.)

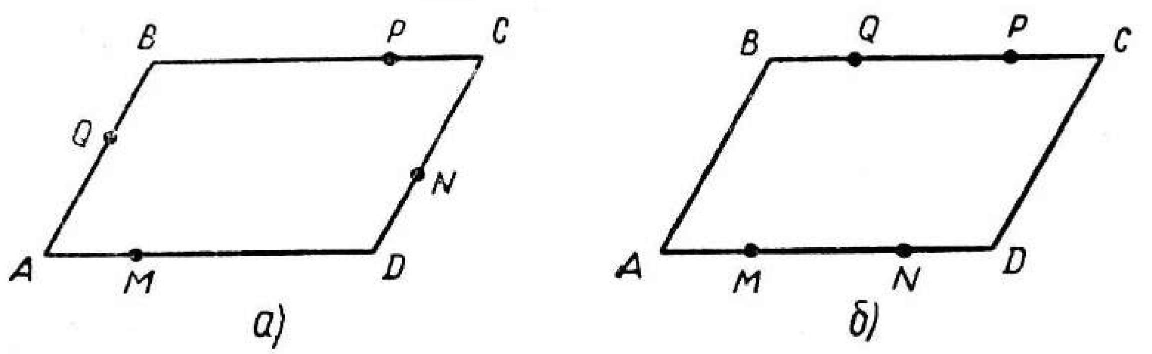
19. 3 һәм 5 см га тигез булган ике ягы һәм 4 см лы биеклеге буенча параллелограмм төзегез.

20. 3 һәм 5 см га тигез булган ике ягы һәм 6 см лы биеклеге буенча параллелограмм төзегез.

Параллелограмм билгеләре

21. Дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленсәләр, бу дүртпочмакның параллелограмм икәнен исбатлагыз.

22*. Кара-каршы яклары конгруэнт һәм параллель булган алтыпочмак бирелгән. Әлеге алтыпочмакның „кара-каршы түбәләрен" тоташтыручы диагональләре бер ноктада кисешәләр һәм шул нокта белән урталай бүленәләр. Шуны исбатлагыз.



17 нче рәсем

23. $ABCD$ параллелограммының яклары өстендә, 17 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, конгруэнт AM, DN, CP, BQ кисемтәләре салынган. M, N, P һәм Q нокталарының параллелограмм түбәләре икәнен исбатлагыз.

24. Теләсә нинди дүртпочмакта аның кара-каршы якларының урталарын тоташтырган кисемтәләр кисешү ноктасында урталай бүленгәнлеген исбатлагыз.

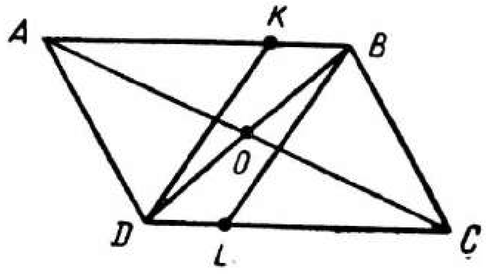
25. ABC почмагының ($\widehat{ABC} < 180°$) эчке ноктасы[1] аша, почмакның яклары арасында урнашкан кисемтәсе шул нокта белән урталай бүленерлек итеп, туры үткәрегез.

Төрле мәсьәләләр

26. Параллелограмм эчендә яткан теләсә нинди ноктадан аның яклары яткан турыларга кадәр ераклыклар суммасы бирелгән параллелограмм өчен даими зурлык икәнен исбатлагыз.

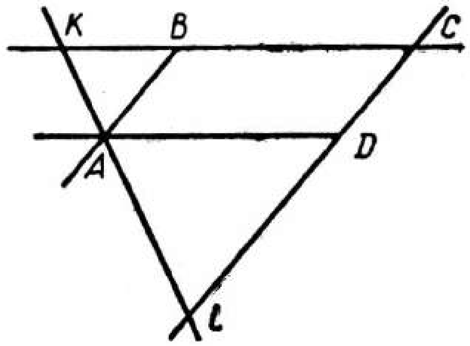
27. а) Ике параллелограмм бирелгән. Аларның берсенең һәр ягында икенчесенең бер түбәсе ята. Бу параллелограммнарның уртак симметрия үзәге барлыгын исбатлагыз.

б) $ABCD$ һәм $DKBL$ параллелограммнарының уртак симметрия үзәге барлыгын исбатлагыз (18 нче рәсем).



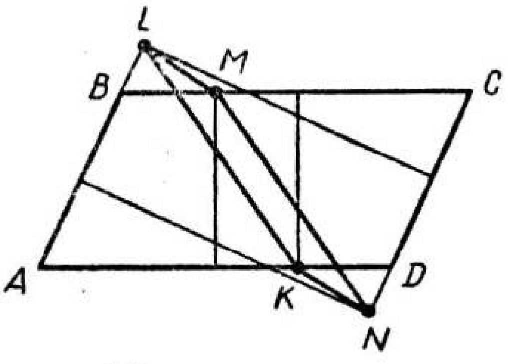
18 нче рәсем

28. 19 нчы рәсемдә $ABCD$ — параллелограмм, KL — аның A түбәле тышкы почмакларының биссектрисасы, $K \in (BC)$, $L \in (CD)$. KCL өчпочмагы тигезьяклы һәм аның ян якларының суммасы $ABCD$ параллелограммының периметрына тигез икәнен исбатлагыз.



19 нчы рәсем

29. Параллелограммның якларына аның кара-каршы якларын яки аларның дәвамнарын K, L, M һәм N нокталарында кисеп үтүче урта перпендикулярлар үткәрелгән (20 нче рәсем). а) $KLMN$ дүртпочмагының параллелограмм икәнен; б) $ABCD$ һәм $KLMN$ параллелограммнарының симметрия үзәкләре тәңгәл килгәнен исбатлагыз.



20 нче рәсем

30. Өчпочмакның тигез булмаган яклары арасындагы медианасы бу якларның кечерәге белән зуррак почмак төзелгәнлеген исбатлагыз.

---

[1] Почмакның эчке ноктасы дип аның яклары өстендә ятмаган ноктасы атала.

Кирәкле һәм җитәрлек шартлар

31. Билгеле булганча, *ABCD* параллелограммында: а) $\hat{A}+\hat{B}=180°$; б) $\hat{B}+\hat{C}=180°$; в) $\hat{C}+\hat{D}=180°$; г) $\hat{A}+\hat{D}=180°$. *ABCD* дүртпочмагының параллелограмм булуы өчен боларның кайсылары җитәрлек шарт булып тора?

32. а) Диагонале ягына конгруэнт; б) диагональләре конгруэнт; в) диагональләре үзара перпендикуляр; г) диагонале ягыннан кыскарак; д) барлык яклары конгруэнт; е) ике ягы үзара перпендикуляр; ж) ике ягы конгруэнт һәм үзара перпендикуляр булган параллелограмм бармы?

33. а) Ике почмакның вертикаль булуы;

б) ике почмакның чиктәш булуы;

в) ике турының параллель булуы;

г) дүртпочмакның параллелограмм булуы;

д) санның 4 кә бүленүе;

е) санның 5 кә һәм 6 га бүленүе;

ж) санның 5 кә һәм 15 кә бүленүе өчен җитәрлек шартларны әйтеп бирегез.

34. а) Ике почмакның вертикаль булуы;

б) ике почмакның чиктәш булуы;

в) ике турының параллель булуы;

г) дүртпочмакның параллелограмм булуы;

д) санның 4 кә бүленүе;

е) санның 5 кә һәм 6 га бүленүе;

ж) санның 5 кә һәм 15 кә бүленүе өчен кирәкле шартларны әйтеп бирегез.

35. а) Ике почмакның вертикаль булуы;

б) ике почмакның чиктәш булуы;

в) ике турының параллель булуы;

г) дүртпочмакның параллелограмм булуы;

д) санның 4 кә бүленүе;

е) санның 5 кә һәм 6 га бүленүе;

ж) санның 5 кә һәм 15 кә бүленүе өчен кирәкле һәм җитәрлек шартларны әйтеп бирегез.

Турыпочмаклык

36. *ABCD* турыпочмаклыгы сызыгыз. Аның диагональләренең кисешү ноктасын *O* дип тамгалагыз һәм, $P\in[AC]$, $|AP|=3|PC|$ булырлык итеп, *P* ноктасы билгеләгез. Турыпочмаклыкның симметрия күчәрләре l һәм m ны үткәрегез ($m\parallel[AB]$).

1) а) l турысына карата күчәрле симметриядә;

б) m турысына карата күчәрле симметриядә;

в) *O* ноктасына карата үзәкле симметриядә *A*, *B*, *C*, *D*, *O* һәм *P* нокталары нинди нокталарга чагылдырыла?

2) *BOC* өчпочмагының образын табыгыз:

а) l турысына карата симметриядә;

б) m турысына карата симметриядә;
в) O ноктасына карата симметриядә.

37. Түбәндәге әйтелмәләрнең дөреслеген кире кагучы мисаллар китерегез:

а) дүртпочмакның диагональләре конгруэнт булса, ул дүртпочмак параллелограмм була;

б) дүртпочмакның диагональләре конгруэнт һәм аның параллель ике ягы белән тиңдәшле рәвештә конгруэнт почмаклар төзесәләр, андый дүртпочмак параллелограмм була.

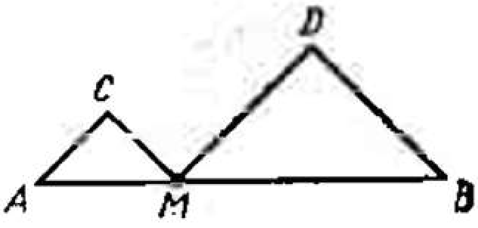
38. $ABCD$ турыпочмаклыгы һәм аның симметрия күчәрләре m һәм n бирелгән ($m \parallel [AB]$, $n \parallel [BC]$, $m \cap n = O$).

Нинди фигурага чагылдырыла:
а) m турысына карата симметриядә AB кисемтәсе;
б) m турысына карата симметриядә түбәләре $ABCD$ турыпочмаклыгының яклары өстендә яткан һәм AO — диагонале булган турыпочмаклык (O түбәсеннән кала);
в) n турысына карата симметриядә BD диагонале;
г) n турысына карата симметриядә m турысы;
д) m турысына карата симметриядә n турысы;
е) O ноктасына карата үзәкле симметриядә m турысы?

39. Кабарынкы дүртпочмакның диагональләре үзара перпендикуляр. Кара-каршы якларының урталарын тоташтыручы кисемтәләрнең конгруэнт икәнен исбатлагыз.

40. AB кисемтәсе бирелгән (21 нче рәсем). M — AB кисемтәсендә ирекле рәвештә алынган нокта. AM һәм MB кисемтәләрен гипотенуза итеп алып, AB турысыннан бер якта тигезьянлы турыпочмаклы ACM һәм MDB өчпочмаклары төзелгән.

а) Бу өчпочмакларның C һәм D түбәләре күплеген күрсәтегез. б) $(AC) \cap (BD) = N$ булсын; MN турысы CD кисемтәсен конгруэнт кисәкләргә бүлгәнен исбатлагыз. в) AMC өчпочмагын камаучы әйләнәләрнең барлык үзәкләре күплеген табыгыз.



21 нче рәсем

Ромб

41. $ABCD$ ромбы бирелгән. O — аның диагональләренең кисешү ноктасы.

1) Ромбның түбәләре нинди нокталарга чагылдырыла:
а) AC турысына карата симметриядә;
б) BD турысына карата симметриядә;
в) O ноктасына карата симметриядә?

2) ABO өчпочмагының образын табыгыз:
а) AC турысына карата симметриядә;
б) BD турысына карата симметриядә;
в) O ноктасына карата симметриядә?

42. Түбәндәге әйтелмәләрнең дөреслеген кире кагучы мисаллар китерегез:

а) дүртпочмакның диагональләре үзара перпендикуляр булсалар, андый дүртпочмак ромб була;

б) дүртпочмакның диагональләре үзара перпендикуляр һәм конгруэнт булсалар, андый дүртпочмак ромб була.

43. Дүртпочмак ромб булсын өчен, 42 нче а) мәсьәләсенең шартына нинди шарт өстәлергә тиеш?

44. Дүртпочмак ромб булсын өчен, 42 нче б) мәсьәләсенең шартына нинди шарт өстәлергә тиеш?

45. Бирелгән өч нокта аша, аларның икесе өченчесеннән бертигез ераклыкта булырлык итеп, параллель турылар үткәрегез. Мәсьәләнең чишелеше булсын өчен, бу нокталар ничек урнашкан булырга тиеш? Мәсьәләнең төрле ничә чишелеше булуы мөмкин?

46. $ABCD$ параллелограммында $|AD|>|AB|$, A һәм B почмакларының биссектрисалары параллелограммның BC һәм AD якларын тиңдәшле рәвештә K һәм L нокталарында кисеп үтә. $ABKL$ дүртпочмагының ромб икәнен исбатлагыз.

47. Ромб диагональләренең кисешү ноктасы аша аның якларына перпендикулярлар үткәрелгән. Бу перпендикулярларның ромб яклары белән кисешү нокталары турыпочмаклык түбәләре икәнен исбатлагыз.

48. Ромбның яклары белән аның диагональләре арасында төзелгән почмаклар 4:5 кә чагыштырмасында. Ромбның почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

49. Ромбның җәенке почмак түбәсеннән үткәрелгән биеклеге каршы якны конгруэнт кисемтәләргә бүлә. Ромбның почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

50*. Ромбның периметры 16 см, биеклеге 2 см. Ромбның почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

51. Ромб ягының уртасы аша бу якка үткәрелгән перпендикулярлар бер ноктада кисешәләр яки ромб төзиләр. Шуны исбатлагыз. Бу ромбларның симметрия күчәрләре үзара ничек урнашкан?

Квадрат

52. Ягы 2 см булган квадратның диагонале икенче квадратның ягы булып хезмәт итә. Икенче квадратның диагоналеи исәпләп чыгарыгыз.

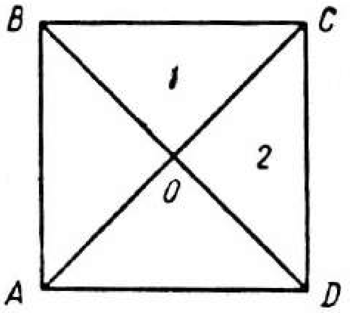
53. Квадратның түбәләре аша аның диагональләренә параллель турылар үткәрелгән. Бу турылар белән төзелгән дүртпочмакның төрен билгеләгез.

54. $ABCD$ дүртпочмагы ягының урталары $KLMN$ дүртпочмагының түбәләре булып хезмәт итә. $KLMN$ дүртпочмагының параллелограмм икәнен исбатлагыз.

Нинди очракта $KLMN$ дүртпочмагы а) турыпочмаклык; б) ромб; в) квадрат була?

55. а) Нинди күчүләр $ABCD$ квадратының AB ягын BC ягына чагылдыра (22 нче рәсем)?

б) Әгәр $ABCD$ — квадрат булса, нинди күчүләр 1 өчпочмагын 2 өчпочмагына чагылдыра (22 нче рәсем)?



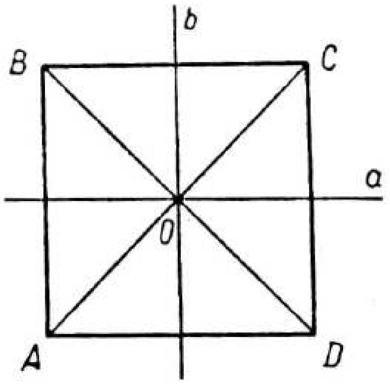
22 нче рәсем

56. $ABCD$ квадраты бирелгән (23 нче рәсем). $(AC) \cap (BD) = O$, $a \cap b = O$, $a \perp b$.

а) a турысына карата симметриядә;

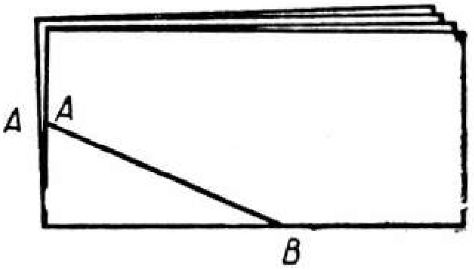
б) b турысына карата симметриядә;

в) O ноктасына карата симметриядә ABC өчпочмагының образын күрсәтегез.



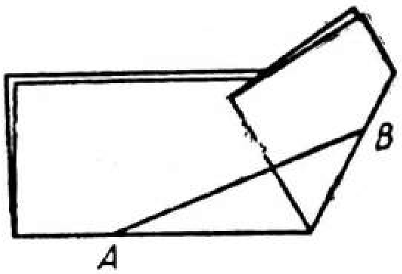
23 нче рәсем

57. 1) Бер бит кәгазь, 24 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә дүрткә бөкләнеп, AB сызыгы буенча киселгән. Кәгазь битен җәйми генә, нинди фигура кисеп алынганын билгеләгез. Кәгазь битеннән квадрат кисеп алу өчен, кисү сызыгы ничек үтәргә тиеш?



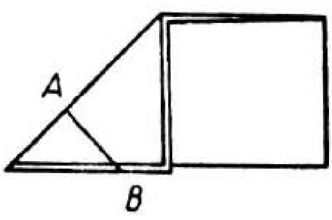
24 нче рәсем

2) Бер бит кәгазь 25 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә бөкләнгән һәм AB сызыгы буенча киселгән. Кәгазь битеннән нинди фигура кисеп алынган? Бу фигураның: а) тигезьянлы өчпочмак; б) тигезьяклы өчпочмак булуы мөмкинме?



25 нче рәсем

3) Кәгазь бите 26 нчы рәсемдә күрсәтелгәнчә бөкләнгән очракта, алдагы мәсьәләнең сорауларына җавап бирегез.



26 нчы рәсем

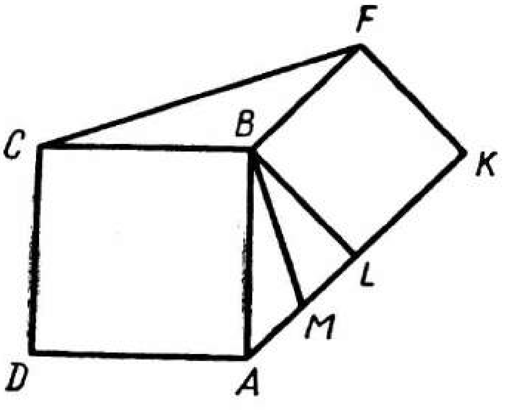
58. $ABCD$ квадраты бирелгән. $K \in [AB]$, $|AK| = |KB|$. D, K һәм C нокталары — тигезьянлы өчпочмакның түбәләре икәнен исбатлагыз.

59. а) $ABCD$ квадраты бирелгән. K, L, M һәм N — тиңдәшле рәвештә аның AB, BC, CD, AD якларының урталары. $\widehat{KLM} = \widehat{MNK} = 90^\circ$ икәнен исбатлагыз.

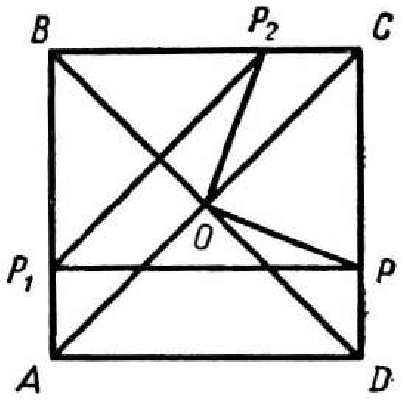
б) $ABCD$ квадраты бирелгән. K һәм M нокталары аның AB һәм CD якларын $|AK|:|KB| = |CM|:|MD|$ чагыштырмасында бүлә. $\widehat{DKC} = \widehat{BMA}$ икәнен исбатлагыз.

60. $ABCD$ квадратының симметрия үзәге аша, AB ягын кисеп үтәрлек итеп, l турысы үткәрелгән. $A \notin l$, $B \notin l$. B һәм C түбәләренең турыдан ераклыклары суммасы A һәм D түбәләренең бу турыдан ераклыклары суммасына тигез икәнен исбатлагыз.

61. Квадратның яклары өстендә, аның тышкы ягында, квадратлар төзел-



27 нче рәсем



28 нче рәсем

гән. Бу квадратларның симметрия үзәкләре квадрат түбәләре икәнен исбатлагыз.

62. *ABCD* турыпочмаклыгын камаучы шундый *KLMN* дүртпочмагы төзелгән: бу дүртпочмакның яклары турыпочмаклыкның *A*, *B*, *C* һәм *D* түбәләре аша үтә, ә *K*, *L*, *M* һәм *N* түбәләре турыпочмаклыкның симметрия күчәрләрендә яталар. *KLMN* дүртпочмагының ромб икәнен исбатлагыз.

Нинди очракта *KLMN* дүртпочмагы квадрат була?

63. *ABCD* һәм *LBFK* квадратларының *B* түбәсе уртак (27 нче рәсем). *ABL* өчпочмагының *BM* медианасы *CF* кисемтәсенә перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

64. *ABCD* квадраты эчендә, $\widehat{MAD} = \widehat{MDA} = 15°$ булырлык итеп, *M* ноктасы алынган. *BCM* өчпочмагының тигезьяклы икәнен исбатлагыз.

65. 28 нче рәсемдә *ABCD* — квадрат, $P \in [CD]$, $[PP_1] \parallel [CB]$, $P_1 \in [AB]$, $[P_1P_2] \in [AC]$, $P_2 \in [BC]$, $O = [AC] \cap [BD]$. $\widehat{P_2OP} = 90°$ икәнен исбат итегез.

66. Яклары 4 см һәм 9 см га тигез булган турыпочмаклыкны, килеп чыккан күппочмаклардан квадрат төзеп булырлык итеп, ике конгруэнт күппочмакка кисегез.

Трапеция

67. 1) Трапециянең эзлекле тәртиптә алынган почмакларының зурлыклары чагыштырмасы: а) 6, 3, 4, 2; б) 8, 7, 13, 12 саннарының чагыштырмасына тигез булуы мөмкинме?

2) Трапециянең бер нигезе янындагы почмаклары 68° һәм 74°. Трапециянең калган почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

68. *ABCD* трапециясенең *BD* диагонале *AB* ягына перпендикуляр; $\widehat{BAD} = 40°$. Трапециянең кечерәк нигезе икенче ян ягына конгруэнт булса, аның калган почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

69. *ABCD* трапециясенең кечерәк нигезе *BC* 4 см га тигез. *B* түбәсе аша *CD* ягына параллель туры үткәрелгән. Килеп чыккан өчпочмакның периметры 12 см. Трапециянең периметрын исәпләп чыгарыгыз.

70. Тигезьянлы трапециянең бер почмагы 60°, ян ягы 24 см, ә нигезләренең суммасы 44 см. Трапециянең нигезләре озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

71. Тигезьянлы трапециянең бер почмагы 60°, нигезләре 15 һәм 49 см га тигез. Трапециянең периметрын исәпләп чыгарыгыз.

72. Диагональләре конгруэнт булган трапециянең тигезьянлы икәнен исбатлагыз.

73. Трапециянең ян яклары кечерәк нигезенә тигез, диагонале нигез белән 30° лы почмак төзи. Трапециянең почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

74. Турыдан бер якта урнашкан кисемтәнең очлары бу турыдан 8 һәм 15 см ераклыкта. Бу кисемтәнең уртасы турыдан нинди ераклыкта?

75. Тигезьянлы трапециянең диагонале аның кысынкы почмагын урталай бүлә. Трапециянең периметры 132 см, ә нигезләре 2:5 чагыштырмасында. Трапециянең урта сызыгының озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

76. Турыпочмаклы трапециянең бер почмагы 135°, урта сызыгы 18 см, ә нигезләре 1:8 чагыштырмасында. Трапециянең кечерәк ян ягын исәпләп чыгарыгыз.

77. Трапециянең нигезләре a һәм b га тигез, ә a нигезе янындагы почмакларының суммасы 90°. Трапеция нигезләренең урталарын тоташтыручы кисемтәнең озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

78. $ABCD$ трапециясе бирелгән (29 нчы рәсем). $[AB] \parallel [CD]$, K — трапециянең A һәм D тышкы почмаклары биссектрисаларының кисешү ноктасы, L ноктасы — B һәм C тышкы почмаклары биссектрисаларының кисешү ноктасы. $|KL| = 25$ см булса, $ABCD$ трапециясенең периметрын исәпләп чыгарыгыз.

79. Трапециянең бер нигезе янындагы почмакларының биссектрисалары аның икенче нигезендә кисешсәләр, икенче нигезнең озынлыгы трапециянең ян яклары озынлыкларының суммасына тигез икәнен исбатлагыз.

80. Трапеция диагональләренең урталарын тоташтыручы кисемтә аның нигез озынлыкларының ярымаермасына тигез икәнен исбатлагыз.

81. a озынлыктагы AB кисемтәсеннән бер якта $M \in [AB]$ булган $AMNP$ һәм $MBKL$ квадратлары төзелгән (30 нчы рәсем). $AMNP$ һәм $MBKL$ квадратларының үзәкләрен тоташтыручы барлык кисемтәләрнең урталары күплеге (D ноктасы) нинди фигура була?

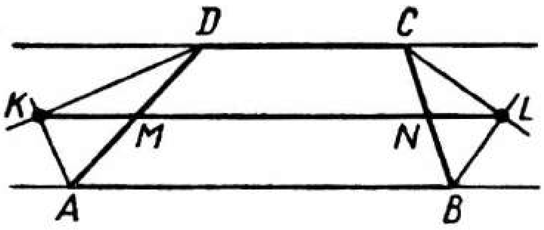
Төрле мәсьәләләр

82. Әйтелмә чынмы яки ялганмы:

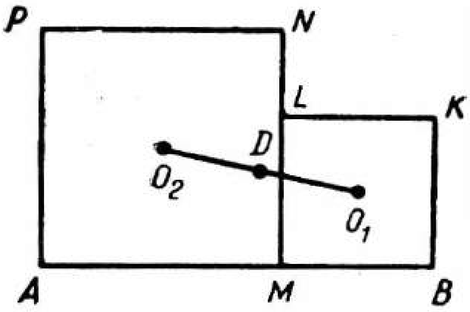
а) турыпочмаклык — трапеция ул;

б) квадрат — параллелограмм ул;

в) ромб — квадрат ул;



29 нчы рәсем



30 нчы рәсем

г) турыпочмаклык — квадрат ул;

д) квадрат — турыпочмаклык ул;

е) квадрат — ромб ул;

ж) ромбның диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленәләр;

з) турыпочмаклыкның диагональләре үзара перпендикуляр;

и) ABC өчпочмагында $|AC|=|BC|$, K, L, M — тиндәшле рәвештә AB, BC, CA якларының урталары, шулай булгач, $KLCM$ дүртпочмагы — ромб.

83. $П$ — турыпочмаклыклар күплеге, P — ромблар күплеге, T — трапецияләр күплеге, K — квадратлар күплеге, E — дүртпочмаклар күплеге.

Түбәндәге әйтелмәләрнең кайсылары чын:

а) $T \subset П$; б) $K = П \cap P$; в) $П \subset P \cap T$; г) $K \subset P$; д) $T \subset E$?

84. Бердәнбер а) параллелограмм; б) ромб; в) турыпочмаклык; г) квадрат төзү өчен нинди бирелмәләр житә?

Һәр биремгә 2 мисал китерегез.

85. Кабарынкы күппочмакның: а) симметрия үзәге булганда;

б) симметрия күчәре булганда;

в) барлык почмаклары туры;

г) барлык почмаклары җәенке;

д) барлык почмаклары кысынкы;

е) барлык эчке почмакларының суммасы тышкы почмакларының суммасыннан ике тапкыр кечерәк булганда, аның яклар саны n нинди шартны канәгатьләндерә?

86. Өч нокта: A, B һәм C бирелгән. Дүрт нокта белән төзелгән фигураның а) симметрия үзәге; б) симметрия күчәре булырлык итеп, дүртенче D ноктасы төзегез.

87. Килеп чыккан кисәкләрдән турыпочмаклык төзерлек итеп, ирекле рәвештә алынган өчпочмакны өч кисәккә бүлегез.

88. Бирелгән дүртпочмак эчендә бу дүртпочмакның барлык түбәләреннән ераклыклары суммасы иң кечкенә булган ноктаны табыгыз.

§ 4. КҮППОЧМАКЛАРНЫҢ МӘЙДАННАРЫ

Турыпочмаклыкның мәйданы

1. Ике ягы: а) 30 һәм 2,9 см; б) 34 см һәм 0,6 дм; в) 4 м һәм 1 м 4 дм га тигез булган турыпочмаклыкның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

2. Турыпочмаклыкның мәйданы һәм бер ягы тиндәшле рәвештә: а) 270 $см^2$ һәм 15 см; б) 142 $м^2$ һәм 35 м 50 см; в) 16 $км^2$ һәм 4000 м; г) 0,096 $км^2$ һәм 300 м булса, аның билгесез ягын исәпләп чыгарыгыз.

3. 1) Җир участогының мәйданы 250 *а*. Бу участокның мәйданын а) квадрат метрларда; б) квадрат километрларда; в) гектарларда күрсәтегез.

2) Җир участогының мәйданы 24 га. Бу участокның мәйданын а) квадрат километрларда; б) квадрат метрларда; в) арларда күрсәтегез.

3) Җир участогының мәйданы 350 000 $м^2$ га тигез. Бу мәйданны: а) квадрат километрларда; б) арларда; в) гектарларда күрсәтегез.

4. Турыпочмаклык формасындагы участокның мәйданы 400 га.

а) Участокның буе 10 км га тигез;

б) участок квадрат формасында булса, периметрын исәпләп чыгарыгыз.

5. Турыпочмаклыкның

а) биеклеген үзгәрешсез калдырып, нигезен өч тапкырга зурайтканда;

б) нигезен үзгәрешсез калдырып, биеклеген ике тапкырга кечерәйткәндә;

в) биеклеген һәм нигезен дүрт тапкырга зурайтканда;

г) нигезен дүрт тапкырга зурайтып, биеклеген өч тапкырга кечерәйткәндә;

д) нигезен өч тапкырга, биеклеген ике тапкырга зурайтканда, аның мәйданы күпмегә үзгәрер?

6. а) Турыпочмаклыкның мәйданы 36 $м^2$, яклары 4:9 чагыштырмасында булса, шул якларны исәпләп чыгарыгыз.

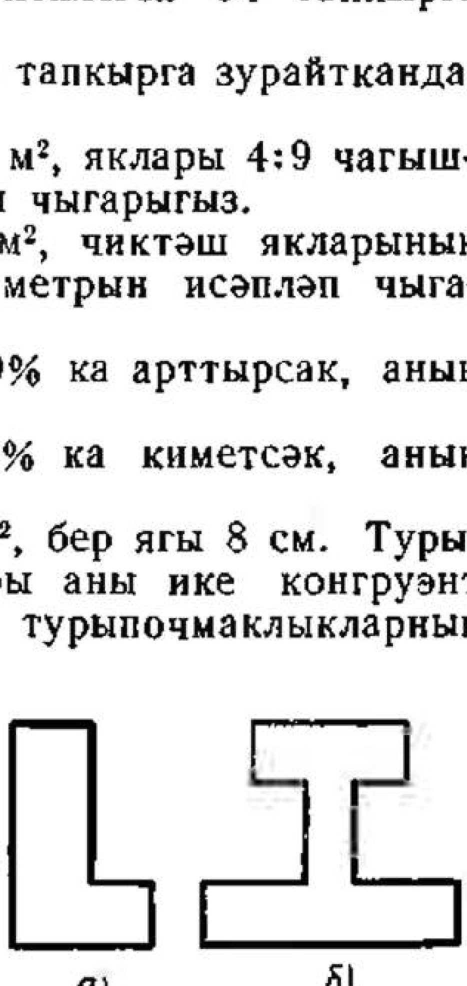
б) Турыпочмаклыкның мәйданы 144 $см^2$, чиктәш якларының чагыштырмасы 1:2 гә кебек булса, периметрын исәпләп чыгарыгыз.

7. а) Турыпочмаклыкның һәр ягын 10% ка арттырсак, аның мәйданы ничә процентка зураер?

б) Турыпочмаклыкның һәр ягын 10% ка киметсәк, аның мәйданы ничә процентка кечерәер?

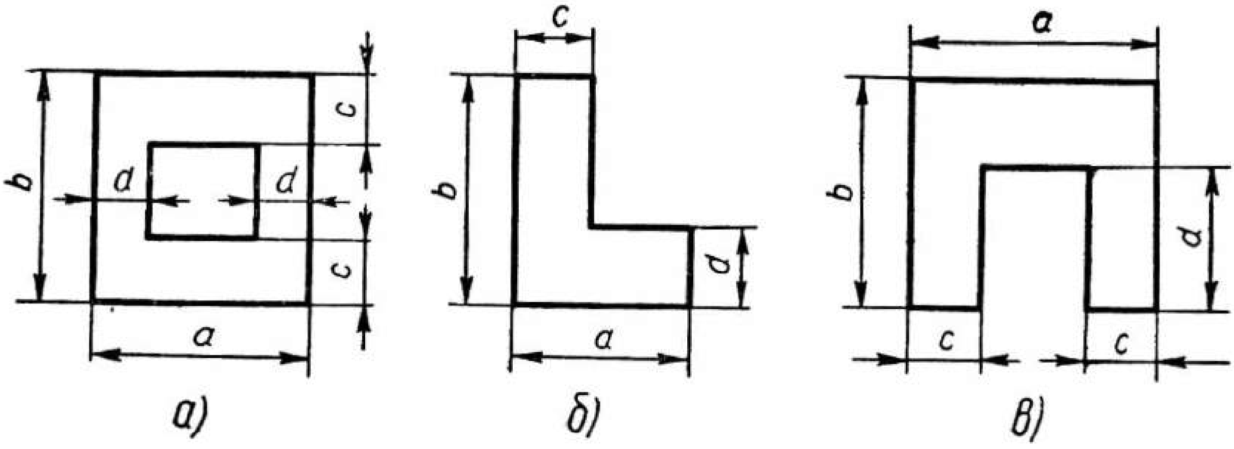
8. Турыпочмаклыкның мәйданы 48 $см^2$, бер ягы 8 см. Турыпочмаклыкның бер ягына параллель туры аны ике конгруэнт турыпочмаклыкка бүлә. Килеп чыккан турыпочмаклыкларның периметрларын исәпләп чыгарыгыз.

9. Бер турыпочмаклыкның нигезе һәм биеклеге тиндәшле рәвештә 20 һәм 60 см га тигез. Икенче турыпочмаклыкның мәйданы беренче турыпочмаклык мәйданының яртысына тигез, ә бер ягы 50 см. Икенче турыпочмаклыкның периметрын исәпләп чыгарыгыз.



31 нче рәсем

10. 31 нче рәсемдә бирелгән фигураларны турыпочмаклыкларга бүлгәлә-



32 нче рәсем

гез һәм, кирәкле элементларын үлчәп, мәйданнарын исәпләп чыгарыгыз. (Фигураларның барлык почмаклары да 90° яки 270°.)

11. a, b, c һәм d билгеле булганда, 32 нче рәсемдә бирелгән фигураларның мәйданнарын исәпләү өчен формулалар языгыз. (Фигураларның барлык почмаклары да 90° яки 270°.)

12. 33 нче рәсемдә бирелгән фигураларның (үлчәнешләре миллиметрларда бирелгән) мәйданнары: а) 550 мм²; б) 1300 мм². Фигураларның барлык почмаклары да 90° яки 270° булса, x ны исәпләп чыгарыгыз.

Квадратның мәйданы

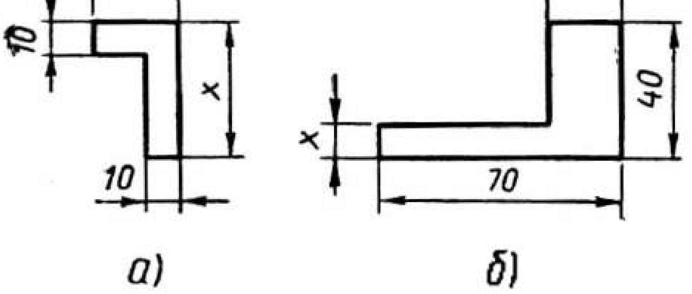
13. 34 нче рәсемдә бирелгән квадратларның, якларының озынлыгын үлчәп, мәйданнарын исәпләп чыгарыгыз.

14. 1) Яклары а) 2,5 см; б) 0,21 м булган квадратның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

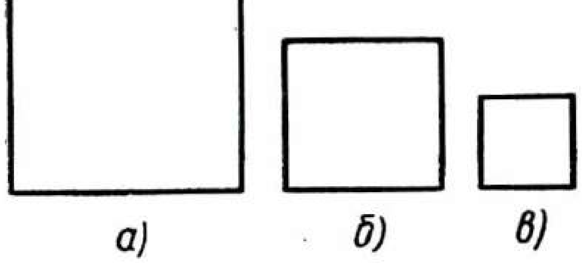
2) Мәйданы а) 256 см²; б) 76,8 м²; в) 14,6 мм² булган квадратның ягын исәпләп чыгарыгыз.

3) Мәйданы 2,5 м² булган квадратның периметрын исәпләп чыгарыгыз.

15. а) Яклары 1 әр м булган ике квадрат һәркайсының түбәсе икенчесенең үзәгендә ятарлык итеп урнашкан. Бу квадратларның кисешмәсе булган фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.



33 нче рәсем



34 нче рәсем

б) Яклары 1 әр м булган ике квадратның берсе — түбәсе икенчесенең үзәгендә ятарлык итеп урнашкан. Бу квадратларның кисешмәсе булган фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

Параллелограммның мәйданы

16. 35 нче рәсемдә тигез зурлыктагы параллелограммнарны күрсәтегез.

17. а) Параллелограммның яклары 4 һәм 6 см, ә бу яклар арасындагы почмагы 30°. Параллелограммның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

б) Ромбның ягы 10 см, бер почмагы 150°. Ромбның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

18. а) Параллелограмм (турыпочмаклык булмаган) һәм турыпочмаклыкның тиңдәшле яклары конгруэнт. Параллелограммның мәйданы турыпочмаклык мәйданының яртысына тигез булса, аның кысынкы почмагын исәпләп чыгарыгыз.

б) Тиңдәшле яклары конгруэнт булган турыпочмаклык һәм параллелограмм (турыпочмаклык булмаган) сызыгыз. Бу фигураларның кайсысының мәйданы зуррак?

19. Яклары $|AB| = 5$ см һәм $|BC| = 3$ см булган $ABCD$ турыпочмаклыгы һәм аңа тигез зурлыкта итеп, ягы $|BE| = 5$ см булган $ABEF$ параллелограммы төзегез.

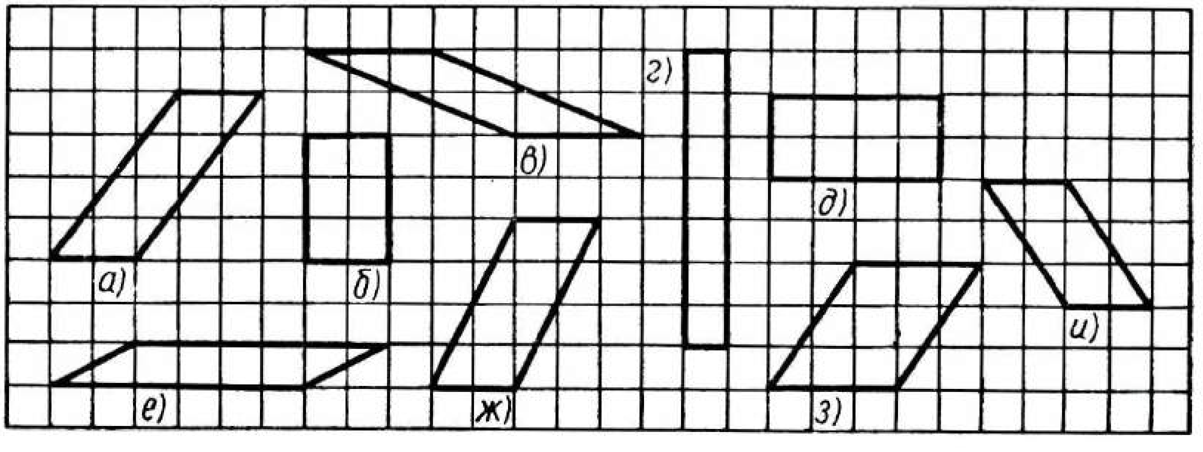
20. а) Параллелограммның мәйданы 24 см². Параллелограммның 6 см лы яклары арасындагы ераклыкны исәпләп чыгарыгыз.

б) Параллелограммның мәйданы 41 см², яклары 5 һәм 10 см. Параллелограммның биеклеген исәпләп чыгарыгыз.

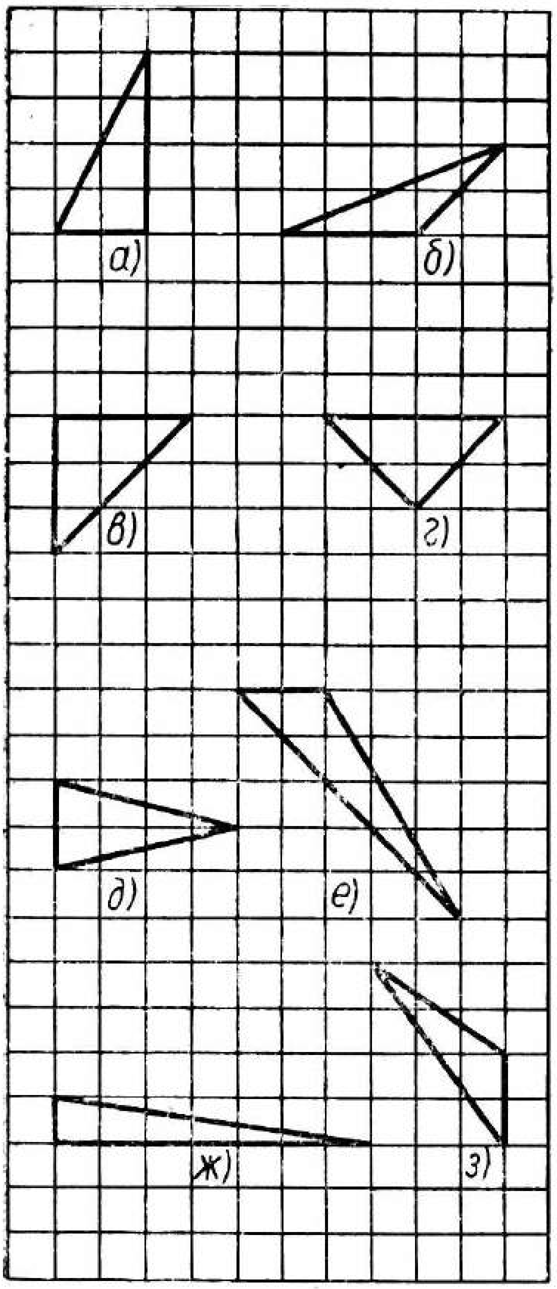
в) Киңлекләре 4 һәм 1 см булган ике полоса, кисешеп, 6 см² мәйданлы параллелограмм төзиләр. Бу параллелограммның якларын исәпләп чыгарыгыз.

21. а) Параллелограммның яклары 6 һәм 4 см. Биеклекләренең берсе 5 см. Икенче биеклеген табыгыз. Мәсьәләнең ничә чишелеше бар?

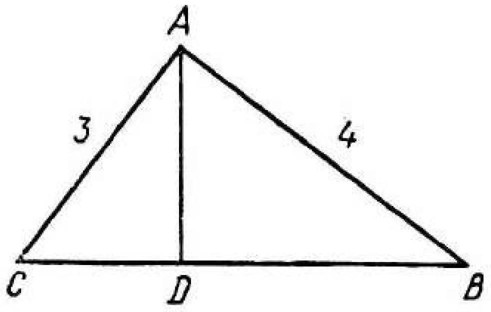
б) Параллелограммның яклары 6 һәм 8 см. Биеклекләренең берсе 5 см. Икенче биеклеген табыгыз. Мәсьәләнең ничә чишелеше бар?



35 нче рәсем



36 нчы рәсем



37 нче рәсем

22. Мәйданы 10 см², ә яклары 5 һәм 3 см булган параллелограмм төзегез.

23. $ABCD$ параллелограммы бирелгән. $|AB| = 12$ см, $|AC| = 16$ см. D түбәсе AC диагоналеннән 4 см ераклыкта ята. D ноктасыннан AB турысына кадәрге ераклыкны исәпләп чыгарыгыз.

Өчпочмакның мәйданы

24. 36 нчы рәсемдә тигез зурлыктагы өчпочмакларны күрсәтегез.

25. Өчпочмакның ике ягы 5 һәм 6 см. Аның мәйданы: а) 10 см² га; б) 15 см² га; в) 20 см² га тигез булуы мөмкинме?

26. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары: а) 4 һәм 7 см; б) 1,2 һәм 35 дм булса, аның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

27. ABC өчпочмагы бирелгән (37 нче рәсем). $\hat{A} = 90°$, $[AD] \perp [CD]$. Табыгыз:

а) ABC өчпочмагының мәйданын;

б) ABD һәм ACD өчпочмакларының мәйданнары чагыштырмасын;

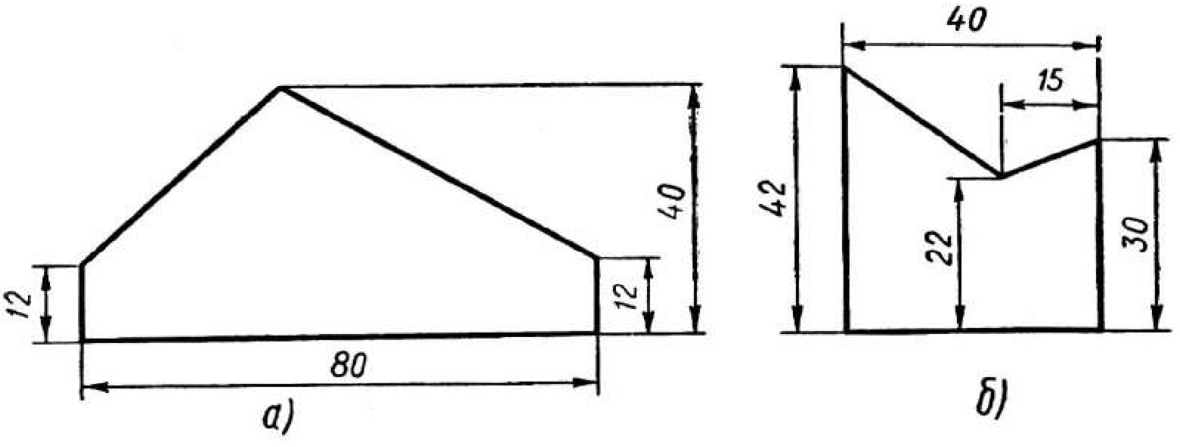
в) AD кисемтәсенең озынлыгын.

28. Өчпочмакның мәйданы 48 см². Өчпочмакның 32 см лы ягына үткәрелгән биеклеген исәпләп чыгарыгыз.

29. ABC өчпочмагы бирелгән. $|AB| = 3|AC|$. B һәм C түбәләреннән үткәрелгән биеклекләрнең чагыштырмасын табыгыз.

30. а) Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары 6 һәм 8 см, гипотенузасы 10 см. Гипотенузага үткәрелгән биеклеген исәпләп чыгарыгыз.

б) Бер өчпочмакның нигезе 10 см, биеклеге 4 см. Икенче өчпочмакның нигезе 20 см. Өчпочмаклар тигез зурлыкта булсын өчен, икенче өчпочмакның нигезенә үткәрелгән биеклек күпмегә тигез булырга тиеш?



38 нче рәсем

в) Турыпочмаклыкның яклары 5 һәм 6 см. Турыпочмаклыкка тигез зурлыкта итеп, нигезе 7,5 см булган өчпочмак төзегез. Мәсьәләнең ничә чишелеше бар?

31. Өчпочмакның a һәм b якларына үткәрелгән биеклекләре h_a һәм h_b га тигез.

а) $a:b = h_b:h_a$ икәнен исбатлагыз.

б) Өчпочмакның $a < b$ булса, $h_b < h_a$ икәнен исбатлагыз.

32. 1) Теләсә нинди өчпочмакта биеклекләр чагыштырмасы шул биеклекләр төшерелгән яклар чагыштырмасына кире пропорциональ икәнен исбатлагыз.

2) Биеклекләре а) 5 см, 4 см, 3 см; б) 1 см, 1 см, 3 см; в) 5, 10, 12 булган өчпочмак бармы?

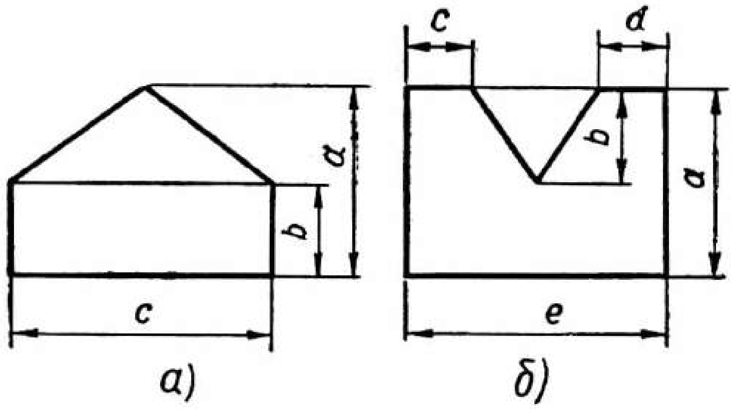
33. 1) 38 нче рәсемдә сурәтләнгән фигураларның мәйданнарын исәпләп чыгарыгыз.

2) 39 нчы рәсемдә сурәтләнгән фигураларның мәйданнарын исәпләү өчен формулалар языгыз.

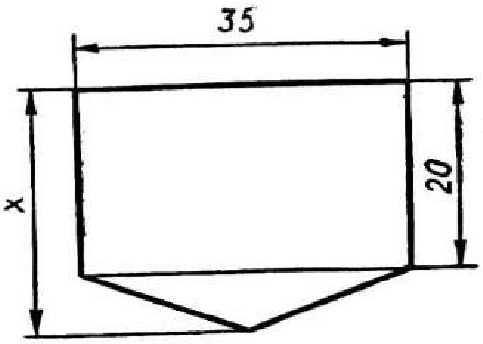
3) 40 нчы рәсемдә сурәтләнгән фигураның мәйданы 805 мм². Билгесез x үлчәнешен исәпләп чыгарыгыз.

34*. Турыпочмаклыкның периметры 14 см. Бер түбәсе бу түбә аша үтмәгән диагоналеннән 2,4 см ераклыкта ятса, турыпочмаклыкның диагонален һәм мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

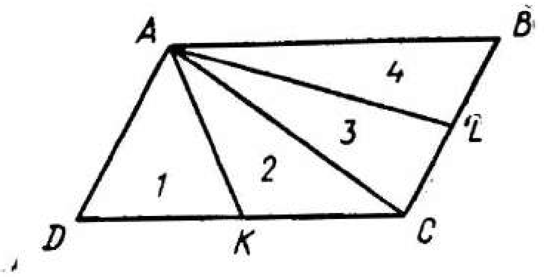
35. $ABCD$ трапециясе бирелгән. $[AB] \parallel [CD]$. O — диагональләренең кисешү ноктасы. Тигез зурлыктагы өчпочмакларның барлык парларын күрсәтегез.



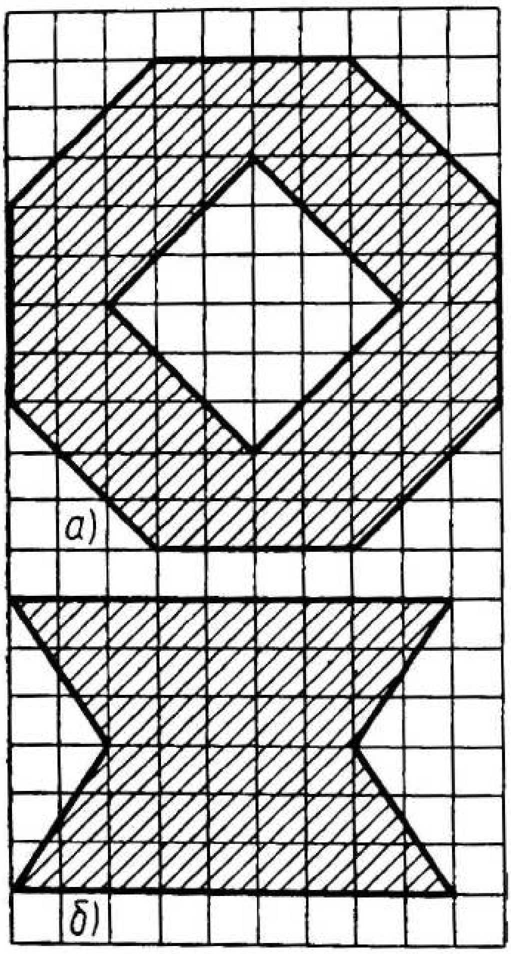
39 нчы рәсем



40 нчы рәсем



41 нче рәсем



42 нче рәсем

36. $ABCD$ параллелограммында A түбәсе кисемтәләр ярдәмендә BC һәм CD якларының урталары белән һәм C түбәсе белән тоташтырылган (41 нче рәсем). 1, 2, 3, 4 өчпочмаклары тигез зурлыкта икәнен исбатлагыз.

37. $ABCD$ параллелограмында $K \in [BC]$, $L \in [BC]$, $|BK| = |KL| = |LC|$. Мәйданнары чагыштырмасын табыгыз:

а) DLK һәм DLC өчпочмакларының;

б) DAC һәм DCK өчпочмакларының;

в) DAC өчпочмагы белән $ADLB$ дүртпочмагының;

г) DCL өчпочмагы белән $ADKB$ дүртпочмагының;

д) $ABKD$ һәм $ABLD$ дүртпочмакларының.

38. Өчпочмакның түбәсе аша, аны: а) тигез зурлыктагы ике өчпочмакка; б) мәйданнары 2:3 чагыштырмасында булган ике өчпочмакка бүләрлек итеп, туры үткәрегез.

39. Өчпочмакның түбәсе аша, аны тигез зурлыктагы өч өчпочмакка бүләрлек итеп, ике туры үткәрегез.

40. Яссылыктагы теләсә кайсы (ниндидер) O ноктасы $ABCD$ параллелограммының түбәләре белән тоташтырылган. а) O ноктасы параллелограмм эчендә ятса, ABO һәм CDO өчпочмакларының мәйданнары суммасы BCO һәм DAO өчпочмакларының мәйданнары суммасына тигез икәнен исбатлагыз. б) O ноктасы параллелограммның ягы өстендә ятса, бу тигезлек сакланырмы? в) O ноктасы параллелограммның түбәсендә ятса, бу тигезлек сакланырмы?

41. A, B, C һәм D нокталары $|AD| = |BC|$, $|BD| = |AC|$ булырлык итеп бирелгән. $ABCD$ — кабарынкы күппочмак.

а) $\angle BAD \cong \angle ABC$; б) $S_{ACD} = S_{BDC}$ икәнен исбатлагыз.

42. Төзелгән өчпочмакның нигезе бирелгән өчпочмакның бер ягына тигез булырлык итеп, бирелгән өчпочмакка тигез зурлыкта булган тигезьянлы өчпочмак төзегез.

43. Төзелгән өчпочмакның нигезе бирелгән өчпочмакның бер ягы белән тәңгәл килерлек, ә нигез янындагы бер почмагын 45° ка тигез итеп, бирелгән өчпочмакка тигез зурлыкта булган өчпочмак төзегез.

44. 42 нче рәсемдә сурәтләнгән фигураларның мәйданнарын исәпләүнең иң рациональ юлын күрсәтегез.

45. Ягы a булган $ABCD$ квадратының симметрия үзәге аша AB ягын кисүче l турысы үткәрелгән. $A \notin l$, $B \notin l$. Квадрат түбәләреннән l турысына кадәрге ераклыклар суммасын һәм l турысының квадрат эчендә урнашкан b кисемтәсенең озынлыгын a аша күрсәтегез.

Трапециянең мәйданы

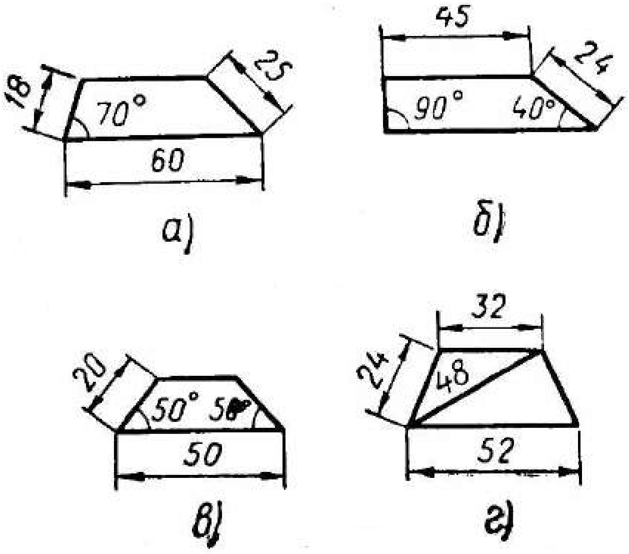
46. 43 нче рәсемдә бирелгән үлчәнешләре буенча трапецияләр төзегез һәм, кирәкле элементларын үлчәп, мәйданнарын табыгыз.

47. 44 нче рәсемдә күрсәтелгән үлчәнешләре буенча трапецияләрнең мәйданнарын исәпләгез.

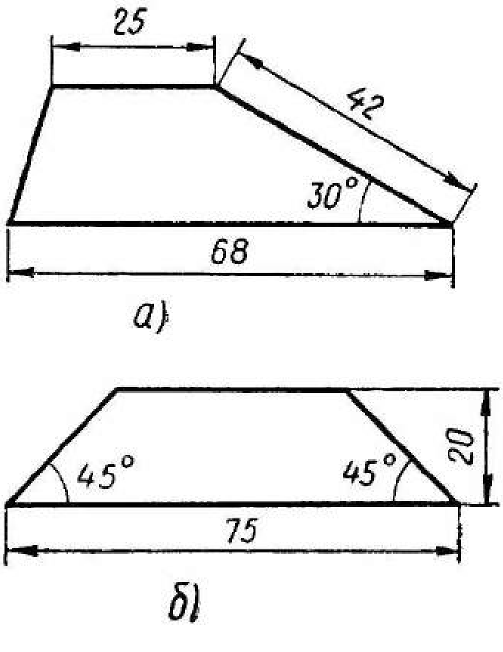
48. Күппочмакларның мәйданнары: а) 12110 мм^2; б) 3375 мм^2 га тигез (45 нче рәсем). x ны табыгыз.

49. Трапеция нигезләренең урталары кисемтә белән тоташтырылган. Килеп чыккан ике трапециянең тигез зурлыкта икәнен исбатлагыз.

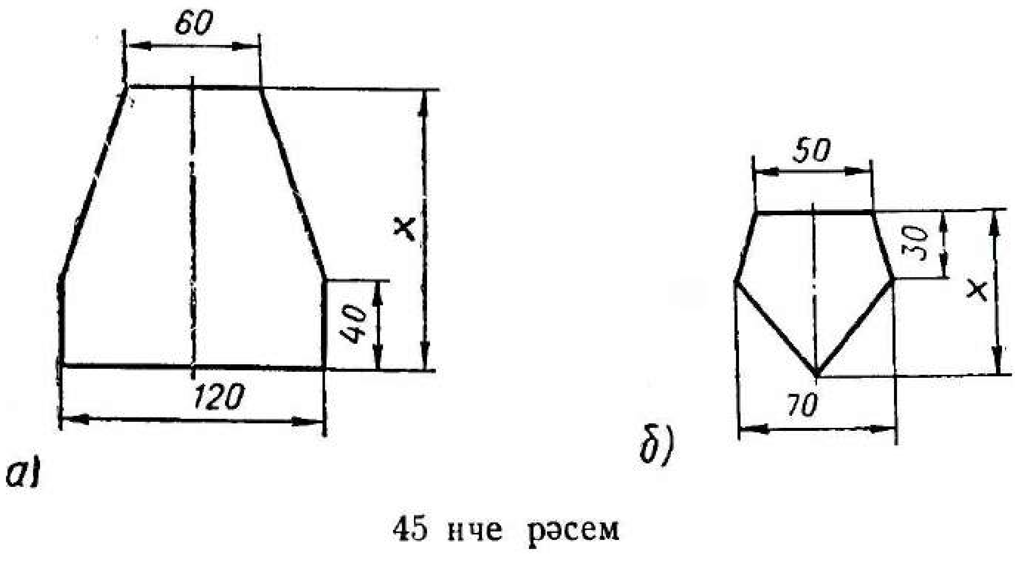
50. $ABCD$ трапециясе бирелгән. $[AB] \parallel [CD]$, $M \in [AB]$, $|AM| = |MB|$, $P \in [MD]$, $[DP] = [PM]$, $Q \in [MC]$, $[CQ] = [MQ]$. APD һәм BQC өчпочмакларының тигез зурлыкта икәнен исбатлагыз.



43 нче рәсем



44 нче рәсем



45 нче рәсем

51. ABC өчпочмагы бирелгән. $|AB|=|AC|=|BC|\sqrt{5}=a$. ABC өчпочмагының мәйданын a аша күрсәтегез.

52. Ике медианасы үзара перпендикуляр һәм m_a, m_b га тигез булган өчпочмакның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

53. Тигезьянлы ABC ($|AB|=|BC|$) өчпочмагы эчендә M ноктасы бирелгән. AMB һәм BMC өчпочмакларының мәйданнары тигез булырлык M нокталары күплеген табыгыз.

54. Ромбның диагональләре 4:3 кә чагыштырмасында. Мәйданы 600 $см^2$ га тигез булса, ромбның биеклеген табыгыз.

55. Өчпочмак сызыгыз һәм аның, түбәләренең координаталары билгеле булганда, мәйданын исәпләп чыгарыгыз:

а) $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ -3)$; $C(6;\ -3)$;
б) $D(8;\ 2)$, $E(3;\ 4)$, $F(3;\ 6)$;
в) $K(2;\ 4)$, $L(6;\ 4)$, $M(3;\ 10)$;
г) $N(-3;\ -2)$, $P(-3;\ -6)$, $Q(-5;\ -10)$.

56. $[CD]\parallel[EF]$, $\hat{F}=45°$, $|FE|=2|CD|=5|CF|=5$ см булса, $CDEF$ трапециясенең мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

57. Трапециянең мәйданы 1 гә тигез. Бу трапециянең зуррак диагоналенең озынлыгы кимендә күпмегә тигез?

58. Трапециянең бер нигезе 1 см, зуррак нигезе белән 30° лы почмак төзүче ян ягы 3 см, ә зуррак нигез янындагы икенче почмагы 45° булса, трапециянең мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

59. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясенең AC диагонале BC ян ягына перпендикуляр, $|AC|=4a$, $|AD|=3a$. Трапециянең мәйданын a аша аңлатыгыз.

Төрле мәсьәләләр

60. Ирекле рәвештә алынган кабарынкы дүртпочмакның урталары эзлекле рәвештә тоташтырылган. Килеп чыккан дүртпочмакның мәйданы бирелгән дүртпочмак мәйданының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.

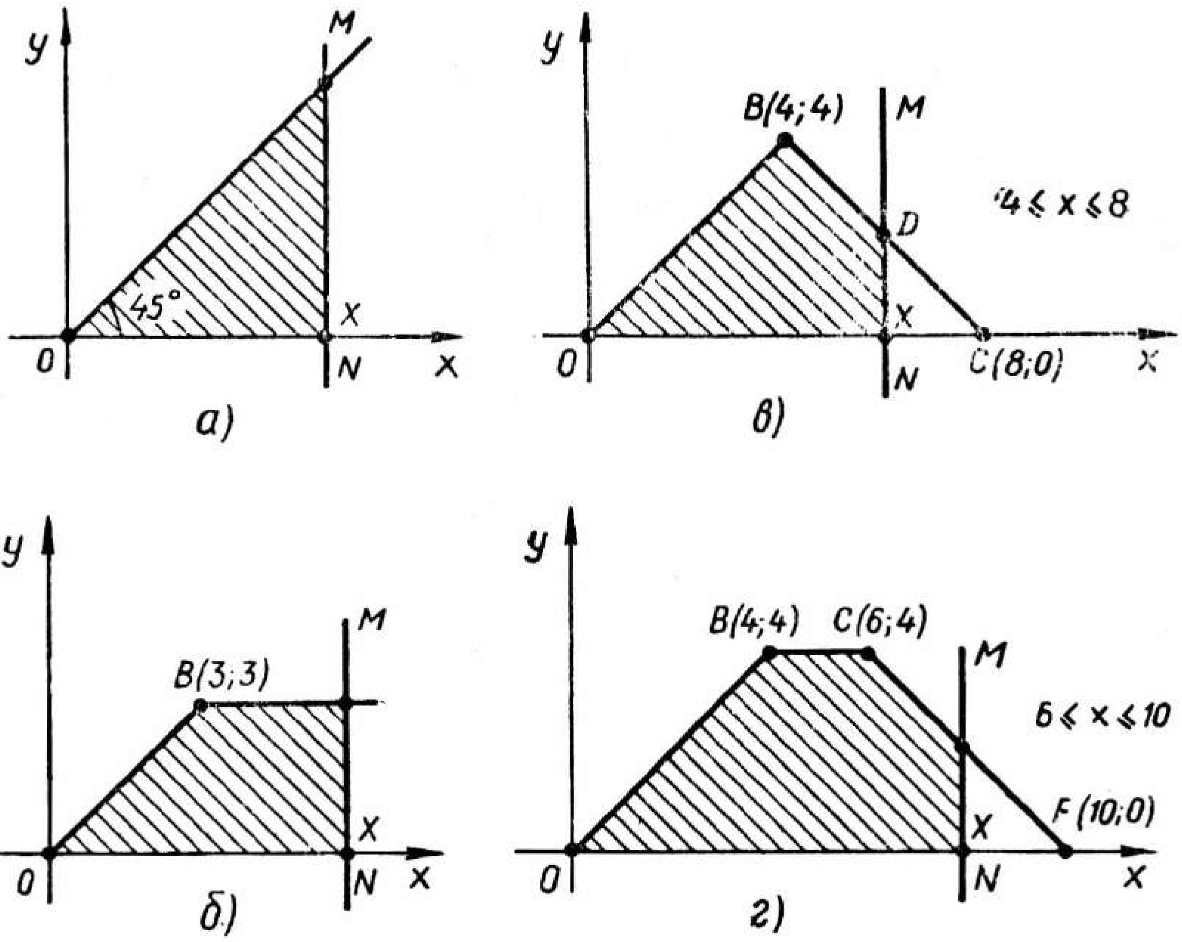
61. Кабарынкы дүртпочмакның кара-каршы якларын тоташтыручы кисемтәләр 3 һәм 4 см га, бер диагонале 5 см га тигез. Бу дүртпочмакның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

62. Ирекле рәвештә алынган дүртпочмакның һәр түбәсеннән, аның бу түбәсе аша үтмәүче диагоналенә параллель итеп, турылар үткәрелгән. Килеп чыккан дүртпочмакның мәйданы бирелгән дүртпочмак мәйданыннан ике тапкыр зуррак икәнен исбатлагыз.

63. $ABCD$ дүртпочмагының диагональләре үзара перпендикуляр һәм 4,5 см, 6,5 см га тигез. Дүртпочмакның мәйданын табыгыз.

64. $KLMN$ дүртпочмагында KM диагонале NL диагонален ике конгруэнт кисемтәгә бүлә. $S_{KLM}=S_{KNM}$ икәнен исбатлагыз.

65. 1) Диагональләре дүртпочмакны дүрт өчпочмакка бүлә. Диагональләрнең кисешү ноктасы — аларның уртак түбәсе. Бу



46 нчы рәсем

өчпочмакларның өчесенең мәйданы 1 $см^2$, 2 $см^2$, 3 $см^2$ га тигез. Дүртенче өчпочмакның мәйданын табыгыз.

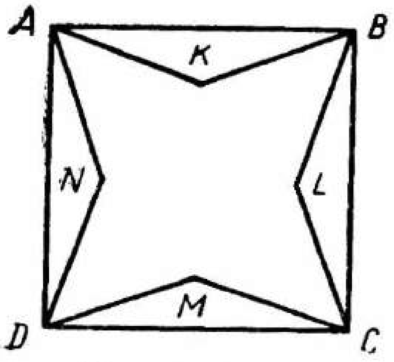
2) Мәйданы 45 $бер^2$ кә тигез булган дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасы белән 2:3 һәм 4:5 чагыштырмасында бүленә. Бирелгән дүртпочмакта диагональләре белән бүленүдән килеп чыккан дүрт өчпочмакның һәркайсының мәйданын табыгыз.

66. MN турысы Ox күчәренә перпендикуляр булса, штрихланган күппочмакның мәйданын OX кисемтәсенең озынлыгы x аша аңлатыгыз (46 нчы рәсем).

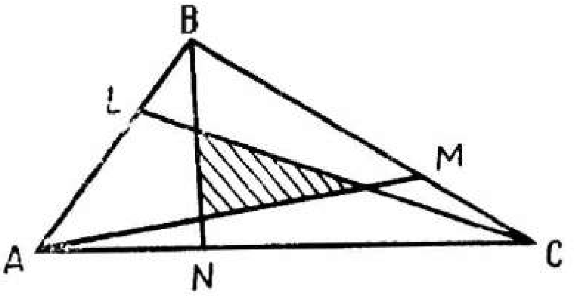
67*. $ABCDEF$ алтыпочмагының барлык эчке почмаклары конгруэнт. $|AB| = |CD| = |EF| = 4a$, $|BC| = |DE| = |FA| = 3a$. Алтыпочмакның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

68*. $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG| = 1$ һәм $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{ADE} = \widehat{AEF} = \widehat{AFG} = 90°$ булган $ABCDEFG$ күппочмагының мәйданын исәпләп чыгарыгыз. Бу күппочмакның AC, AD, AE, AF диагональләренең һәм AG ягының озынлыгын исәпләгәндә, сез нинди закончалык күрдегез?

69*. AB кисемтәсе C һәм D нокталары белән өч конгруэнт кисемтәгә бүленгән: $|AC| = |CD| = |DB|$. Бу кисемтәләрне яклар итеп алып, AB кисемтәсеннән бер якта, тигезьяклы ACE өчпочмагы, $CDGF$ квадраты һәм, $|BH| = 0{,}5\ |DB|$ булырлык итеп, турыпочмаклы DBH өчпочмагы ($\widehat{B} = 90°$) төзелгән. E һәм F,



47 нче рәсем



48 нче рәсем

G һәм H нокталары кисемтәләр белән тоташтырылган. $|AB| = 3b$ булса, $AEFGHB$ күппочмагының мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

70. $ABCD$ трапециясе бирелгән. $[AD] \parallel [CB]$. DC ягының уртасы — K ноктасы — аша KL кисемтәсе үткәрелгән ($[KL] \parallel [AB]$, $L \in [AD]$). $S_{BLDC} - S_{ABL} = 0{,}5\ S_{ABCD}$ икәнен исбатлагыз.

71. $ABCD$ квадратының ягы a га тигез. $AKBLCMDN$ йолдызының барлык яклары конгруэнт, ә K, L, M, N нокталары AB, BC, CD һәм AD якларыннан тиңдәшле рәвештә бер үк b ераклыгында яталар (47 нче рәсем). Йолдызның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

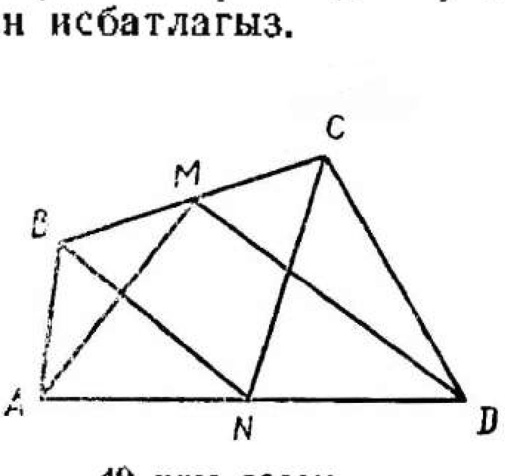
72*. Өчпочмакның һәр ягы өч конгруэнт кисемтәгә бүленгән һәм бүлү нокталары 48 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә тоташтырылган. Бирелгән өчпочмак белән штрихланган өчпочмакның мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

73. $ABCD$ дүртпочмагында BC һәм AD якларының урталары (M һәм N нокталары), 49 нчы рәсемдә күрсәтелгәнчә, дүртпочмакның түбәләре белән тоташтырылган. $S_{AMD} = S_{ABN} + S_{NCD}$ икәнен исбатлагыз.

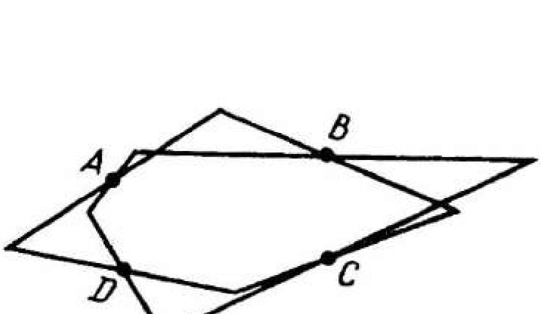
74. Өчпочмакның ягы өстендә алынган нокта аша өчпочмакны тигез зурлыктагы ике фигурага бүлүче туры үткәрегез.

75. Мәйданы S ка тигез булган кабарынкы дүртпочмак эчендә A ноктасы бирелгән. Бирелгән дүртпочмак якларының урталарына карата A ноктасына симметрияле нокталар — түбәләре булып хезмәт иткән дүртпочмакның төрен билгеләгез һәм мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

76. Берничә кабарынкы дүртпочмакның якларының урталары уртак (50 нче рәсем). Бу дүртпочмакларның тигез зурлыкта икәнен исбатлагыз.



49 нчы рәсем



50 нче рәсем

77. Диагональләре үзара перпендикуляр булган трапециядә нигезләренең урталарын тоташтыручы кисемтә трапециянең урта сызыгына тигез икәнен исбатлагыз.

78. Күппочмак түбәләренең координаталары:

а) $K(0; 0)$, $L(4; 4)$, $M(6; 0)$ билгеле булса, KLM өчпочмагының;

б) $A(0; 0)$, $B(3; 4)$ булса, $ABCD$ квадратының;

в) $Q(0; 0)$, $R(4; 3)$ булса, $PQRT$ квадратының;

г) $A(0; 4)$, $B(4; 4)$, $C(6; 0)$, $D(0; 0)$ булса, $ABCD$ дүртпочмагының;

д) $A(0; 5)$, $B(3; 6)$, $C(5; 5)$, $D(5; 2)$, $E(3; 0)$ булса, $ABCDE$ бишпочмагының мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

Күрсәтмә. Башта һәр фигураны төзегез.

ӘЙЛӘНӘ ҺӘМ ТҮГӘРӘК

Әйләнә, хорда, орынма

1. а) $A(0; 0)$, $B(2; 4)$, $C(-3; 6)$; б) $M(5; 5)$, $N(-2; 2)$, $P(1; 2)$ нокталары аша әйләнә үткәрегез.

2. а) $A(0; 0)$ һәм $B(5; 5)$; б) $M(2; 5)$ һәм $N(-3; 2)$ нокталары аша 4 см радиуслы әйләнә үткәрегез.

3. $A(2; 3)$ һәм $B(6; -2)$ нокталары аша туры үткәрегез һәм, бу турыга орындырып, үзәге $O(0; 0)$ ноктасында булган әйләнә төзегез.

4. Бирелгән M ноктасы аша үтүче a радиуслы барлык әйләнәләрнең үзәкләре күплеге нинди фигура төзи?

5. Квадрат бирелгән. Бу квадратның яклары — хордалары булырлык итеп, әйләнә төзегез.

6. Туры бирелгән. Турыга бирелгән ноктада орынучы барлык әйләнәләрнең үзәкләре күплеге нинди фигура төзи?

7. Бирелгән турыга орынучы a радиуслы барлык әйләнәләрнең үзәкләре күплеге нинди фигура төзи?

8. Әйләнәгә орынма үткәрелгән. Әйләнәнең теләсә кайсы диаметрының очларыннан бу орынмага кадәр ераклыклар суммасы әлеге әйләнәнең диаметрына тигез икәнен исбатлагыз.

9. Туры һәм туры өстендә нокта бирелгән. Турыга шул ноктада орындырып һәм радиусы бирелгән озынлыкта булган әйләнә төзегез.

10. Бирелгән почмакның бер ягы өстендәге нокта аша һәм шул почмак якларына орынучы әйләнә үткәрегез.

11. Туры һәм аннан читтә нокта бирелгән. Шул нокта аша, турыга орындырып, радиусы бирелгән озынлыкта булган әйләнә төзегез.

12. Турыпочмаклы өчпочмак эченә камалган түгәрәкнең диаметры бу өчпочмакның катетлары суммасы белән гипотенуза аермасына тигез икәнен исбатлагыз.

13. Үзәге O ноктасында булган 4 см радиуслы әйләнәгә A ноктасыннан орынма үткәрелгән. B — орыну ноктасы, $|AB| = 8$ см булса, ABO өчпочмагының мәйданын табыгыз.

14. Турыпочмаклы өчпочмакның якларын диаметр итеп алып, аның тышкы ягында ярымәйләнәләр төзелгән. Бу ярымәйләнәләргә, турыпочмаклы өчпочмакның катетларына параллель һәм фигураны кисеп үтмәслек итеп, орынмалар үткәрелгән. Яклары

шул орынмаларда яткан дүртпочмакның квадрат икәнен исбатлагыз.

15. Билгеле бер озынлыкта кисемтә бирелгән. Аның очлары бирелгән туры почмакның яклары буйлап шуганда, бу кисемтәнең урталары күплеге нинди фигура төзи?

16. Әйләнәнең A ноктасыннан, аның үзәгеннән 4 см ераклыкта итеп, үзара перпендикуляр һәм конгруэнт ике хорда үткәрелгән. Һәр хорданың озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

17. Бирелгән туры өстендә шундый нокта табыгыз, бу ноктадан бирелгән әйләнәгә үткәрелгән орынма кисемтәләре бирелгән озынлыкта булсын.

Үзәк почмаклар һәм дугалар

18. а) Башы бирелгән әйләнәнең үзәге белән тәңгәл килгән ике нур; б) әйләнәнең үзәге аша үтүче ике туры бу әйләнәнең ничә дугасын билгели?

19. Бирелгән ноктаны үзәк итеп алыгыз да, бирелгән әйләнәне ике ярымәйләнәгә бүләрлек итеп, икенче бер әйләнә төзегез.

20. Хордага параллель орынма, хорда тартып торган дуганы, орыну ноктасында ике конгруэнт дугага бүлә. Шуны исбатлагыз.

21. Әйләнәнең диаметры очларыннан үткәрелгән параллель хордаларның конгруэнт икәнен исбатлагыз.

22. Почмакның ягы өстендә бирелгән ноктаны үзәк итеп алыгыз да, аның икенче ягыннан билгеле бер озынлыктагы хорда кисеп алырлык итеп, шул почмакны камаучы әйләнә үткәрегез.

23. Әйләнәдә конгруэнт AB һәм CD хордалары үткәрелгән. $\smile BC = \smile AD$ яисә $\smile BD = \smile AC$ икәнен исбатлагыз.

24. O үзәкле әйләнәнең AB хордасы C һәм D нокталары белән өч конгруэнт кисемтәгә бүленгән һәм A, B, C, D нокталары O ноктасы белән тоташтырылган. OC һәм OD нурлары белән AOB почмагының конгруэнт почмакларга бүленмәгәнен исбатлагыз.

25. $(O; r)$ әйләнәсе бирелгән. $|OA| < r$ булган A ноктасы аша, әлеге нокта белән бүленүдән килеп чыккан кисемтәләренең аермасы бирелгән d кисемтәсенә тигез булырлык итеп, хорда үткәрегез.

26. Радиуслары тиңдәшле рәвештә a һәм $2a$ га тигез булган ике концентрик әйләнә: c һәм c_1 бирелгән. O ноктасы аларның үзәге. P ноктасы бу әйләнәләр арасында ята. P ноктасын үзәк итеп алып, c_1 әйләнәсен M ноктасында кисеп үтүче OP радиуслы әйләнә үткәрелгән. P ноктасыннан OM турысына үткәрелгән перпендикуляр c әйләнәсенә орынма икәнен исбатлагыз.

27. Түгәрәккә тиңдәшле яклары параллель булган ике трапеция камалган. Бу трапецияләрнең диагональләре конгруэнт икәнен исбатлагыз.

28. Һәркайсы бирелгән почмакның якларыннан конгруэнт кисемтәләр кисеп алган барлык әйләнәләрнең үзәкләре күплеге нинди фигура төзи?

Үзәктән хордага кадәр ераклык

29. 8 см лы хорда әйләнәдән 90° лы дуга кисеп ала. Әйләнә үзәгеннән хордага кадәр ераклыкны табыгыз.

30. Әйләнәдә ике параллель хорда үткәрелгән. Бу хордалар әйләнәдән 90° лы дугалар кисеп ала. Бер хорданың озынлыгы 12 см булса, хордалар арасындагы ераклыкны исәпләп чыгарыгыз.

31. Бер үк әйләнәдә бер хорда икенчесенә перпендикуляр булып, аның уртасы аша үтсә, ул бу әйләнәнең диаметры була. Шуны исбатлагыз.

32. Әйләнә бирелгән. Радиусының уртасы аша, аңа перпендикуляр итеп, хорда үткәрелгән. Әйләнә үзәгеннән бу хорданың 120° лы почмак астында күренгәнен исбатлагыз.

Векторларны кушу һәм алу. Векторны санга тапкырлау

1. $ABCD$ һәм A_1BCD_1 параллелограммнары бирелгән. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C}$ икәнен исбатлагыз.

2. M ноктасы – AB кисемтәсенең уртасы. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ икәнен исбатлагыз, монда O — яссылыкның теләсә нинди ноктасы.

3. $\overrightarrow{AA_1}$ медианалары уртак булган ABC һәм AB_1C_1 өчпочмаклары бирелгән. $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{C_1B}$ икәнен исбатлагыз.

4. $ABCD$ параллелограммы бирелгән. M ноктасы — параллелограммның симметрия үзәге. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ икәнен исбатлагыз.

5. ABC өчпочмагы һәм M ноктасы бирелгән. M — медианаларның кисешү ноктасы булса, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ икәнен исбатлагыз.

6. ABC өчпочмагында AA_1, BB_1 һәм CC_1 медианалары үткәрелгән. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$ икәнен исбатлагыз.

7. ABC өчпочмагы бирелгән. Ирекле рәвештә алынган O ноктасыннан башлап, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OB_1}$ һәм $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC_1}$ булырлык итеп, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ векторлары салынган. O ноктасы $A_1B_1C_1$ өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы белән тәңгәл килгәнен исбатлагыз.

8. ABC өчпочмагы бирелгән. O — аның медианаларының кисешү ноктасы. Теләсә нинди M ноктасы өчен $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$ бәйләнешенең барлыгын исбатлагыз.

9. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$ булырлык итеп, өч нокта: A, B һәм C бирелгән. Теләсә нинди O ноктасы өчен $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ тигезлегенең дөреслеген исбатлагыз. $\overrightarrow{OA}$ векторын $\overrightarrow{OB}$ һәм $\overrightarrow{OC}$ векторлары аша, $\overrightarrow{OC}$ векторын $\overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{OB}$ векторлары аша күрсәтегез.

10. S үзәкле симметрия A ноктасын B ноктасына чагылдыра. O — яссылыкта ирекле рәвештә алынган нокта булганда, $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}$ икәнен исбатлагыз.

11. M һәм M_1 — ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары. $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$ икәнен исбатлагыз.

12. Дүрт нокта: A, B, C һәм D бирелгән. AB һәм CD, AC һәм BD, AD һәм BC пар кисемтәләренең урталарын тоташтыручы кисемтәләрнең бер ноктада урталай бүленгәнен исбат итегез.

13. O үзәкле әйләнә бирелгән. Үзара перпендикуляр AB һәм CD хордалары үткәрелгән. Хордалар яки аларның дәвамнары M ноктасында кисешәләр. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ икәнен исбатлагыз.

14. $ABCD$ параллелограммы бирелгән. O ноктасы — аның үзәге. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$ икәнен исбатлагыз, монда P — яссылыктагы теләсә нинди нокта.

15. $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ булырлык итеп, өч нокта: A, B һәм C бирелгән. Теләсә нинди O ноктасы өчен $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$ тигезлегенең дөреслеген исбатлагыз.

16. Туры өстендә төрле өч нокта: A, B һәм C бирелгән. O — яссылыкта ирекле рәвештә алынган нокта булганда, $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$ үтәлерлек k кыйммәтенең барлыгын исбатлагыз.

Киресенең дөреслеген исбатлагыз: төрле өч нокта өчен югарыдагы тигезлек үтәлсә, A, B һәм C нокталары бер туры өстендә яталар.

17. ABC өчпочмагының яклары: BC, CA һәм AB өстендә, $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{CA}$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә A_1, B_1 һәм C_1 нокталары бирелгән. $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ һәм $\overrightarrow{CC_1}$ векторларының суммасын исәпләп чыгарыгыз.

18. ABC өчпочмагында CC_1 медианасының уртасы — M ноктасы аша AM турысы үткәрелгән. Бу туры BC ягын P ноктасында кисеп үтә. $|\overrightarrow{CP}|:|\overrightarrow{PB}| = 1:2$ икәнен исбатлагыз.

19. p_1 турысы өстендә — өч нокта: A_1, B_1 һәм C_1, p_2 турысы өстендә өч нокта: A_2, B_2 һәм C_2 бирелгән, өстәвенә $\overrightarrow{A_1B_1} = m\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = m\overrightarrow{B_2C_2}$. $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ һәм $\overrightarrow{C_1C_2}$ кисемтәләре A_0, B_0 һәм C_0 нокталары белән тигез чагыштырмада бүленгән. Бу нокталарның бер туры өстендә ятканлыгын яки тәңгәл килгәнлеген исбатлагыз.

Векторларның коллинеарлыгы

20. O үзәкле әйләнә бирелгән. M ноктасында кисешүче конгруэнт AB һәм CD хордалары үткәрелгән. $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ һәм $\vec{OD}$ векторларының суммасы $\vec{OM}$ векторына коллинеар икәнен исбатлагыз.

21. Коллинеар булмаган $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бирелгән. Векторлар тигезлеге $k\vec{a}+l\vec{b}=p\vec{a}+q\vec{b}$ дан $k=p$, $l=q$ тигезлекләренең килеп чыкканын исбатлагыз.

22. Пар-пар коллинеар булмаган $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ һәм $\vec{OC}$ векторлары O ноктасыннан башлап салынган. $\vec{OC}$ векторы $\vec{OA}+\vec{OB}$ векторына һәм $\vec{OB}$ векторы $\vec{OC}+\vec{OA}$ векторына коллинеар булса, $\vec{OA}$ векторы $\vec{OB}+\vec{OC}$ векторына коллинеар икәнен исбатлагыз.

23. Пар-пар коллинеар булмаган $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ һәм $\vec{OD}$ векторлары O ноктасыннан башлап салынган. $\vec{OA}$ векторы $\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}$ векторына, $\vec{OB}$ векторы $\vec{OD}+\vec{OA}+\vec{OC}$ векторына, $\vec{OC}$ векторы $\vec{OD}+\vec{OA}+\vec{OB}$ векторына коллинеар булса, $\vec{OD}$ векторының $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$ векторына коллинеар икәнен исбатлагыз.

24. $ABCD$ трапециясе бирелгән. Трапециянең AB һәм CD нигезләренә параллель туры аның ян яклары AD һәм BC ны тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталарында кисеп үтә. $(AN)\parallel(CM)$ булса, $(DN)\parallel(BM)$ икәнен исбатлагыз.

25. $ABCD$ трапециясе бирелгән, монда AB һәм CD — трапециянең нигезләре, ә M һәм N нокталары — AD һәм BC ян якларының урталары. $(AN)\nparallel(CM)$ икәнен исбатлагыз.

Векторның озынлыгы. Ике векторның юнәлешләре арасындагы почмак

26. Озынлыклары тигез һәм нуль булмаган ике вектор: $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ бирелгән. $\vec{a}+\vec{b}$ һәм $\vec{a}-\vec{b}$ векторларының юнәлешләре үзара перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

27. O үзәкле әйләнә бирелгән. M ноктасында кисешүче үзара перпендикуляр AB һәм CD хордалары үткәрелгән. AC һәм BD хордаларының урталары, M ноктасы һәм бирелгән әйләнәнең үзәге O — параллелограмм түбәләре икәнен исбатлагыз.

28. O үзәкле әйләнәдә OA, OB, OC һәм OD радиуслары үткәрелгән. Әгәр $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$ булса, $ABCD$ ның турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

29. ABC өчпочмагында CC_1 медианасы үткәрелгән. $|CC_1|<\frac{1}{2}(|CA|+|CB|)$ икәнен исбатлагыз.

30. ABC өчпочмагы бирелгән. $|OM| < \frac{1}{3}(|OA| + |OB| + |OC|)$ икәнен исбатлагыз, монда M — өчпочмак медианаларының кисешү ноктасы, O — яссылыкта ирекле рәвештә алынган нокта.

31. Үзара перпендикуляр $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бирелгән. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ икәнен исбатлагыз.

Моңа кире теореманы әйтегез һәм исбатлагыз.

32. Коллинеар булмаган $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бирелгән. $|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$ булса, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ икәнен исбатлагыз.

33. Коллинеар булмаган $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бирелгән. $|\vec{a} + k\vec{b}| = |\vec{b} + k\vec{a}|$ тигезлегеннән $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ икәнлеге чыгамы?

34*. $ABCD$ һәм $AB_1C_1D_1$ параллелограммнарының A түбәсе — уртак. $|CC_1| \leqslant |BB_1| + |DD_1|$ икәнен исбатлагыз.

35*. $ABCD$ трапециясендә ($[AB] \parallel [CD]$) AC һәм BD диагональләренең кисешү ноктасы O аша, нигезләренә параллель итеп, AD һәм BC ян якларын M һәм N нокталарында кисүче туры үткәрелгән. $\overrightarrow{MN} = \frac{b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{DC}}{a + b}$ икәнен исбатлагыз, монда $a = |AB|$, $b = |CD|$.

36*. ABC өчпочмагында CC_1 биссектрисасы үткәрелгән. $\overrightarrow{CC_1} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a + b}$ икәнен исбатлагыз, монда $a = |CB|$, $b = |CA|$.

37*. Үзара перпендикуляр $\overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{OB}$ векторлары бирелгән. O ноктасының AB кисемтәсенә OC перпендикуляры үткәрелгән. $\overrightarrow{OC} = \frac{a^2\overrightarrow{OB} + b^2\overrightarrow{OA}}{a^2 + b^2}$ икәнен исбатлагыз, монда $a = |\overrightarrow{OA}|$, $b = |\overrightarrow{OB}|$.

38*. O үзәкле әйләнәгә ABC өчпочмагы камалган. $\overrightarrow{OH} = |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{OC}|$ икәнен исбатлагыз, H — өчпочмак биеклекләренең кисешү ноктасы.

39. O үзәкле әйләнә өстендә A һәм B нокталары бирелгән. Әйләнәгә шул нокталарда үткәрелгән орынмалар C ноктасында кисешәләр. 1) $\widehat{AOB} = 60°$; 2) $\widehat{AOB} = 90°$; 3) $\widehat{AOB} = 120°$ булганда, $\overrightarrow{OC}$ векторын $\overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{OB}$ векторлары аша күрсәтегез.

40. O үзәкле әйләнә бирелгән. A һәм B — әйләнә нокталары. AOB почмагының биссектрисасы әйләнәне C ноктасында кисеп үтә.

1) $\widehat{AOB} = 60°$; 2) $\widehat{AOB} = 90°$; 3) $\widehat{AOB} = 120°$

булганда, $\overrightarrow{OC}$ векторын $\overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{OB}$ векторлары аша күрсәтегез.

Төрле мәсьәләләр

41. AB кисемтәсе һәм AB турысы өстендә ятмаган O ноктасы бирелгән. $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$, $\alpha+\beta=1$, $\alpha>0$, $\beta>0$ шарты үтәлгән M ноткалары күплеген табыгыз.

42. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+k\vec{a}$ (монда O һәм A — бирелгән нокталар, $\vec{a}$ — нуль булмаган бирелгән вектор), шул ук вакытта:

1) $k\geqslant 0$; 2) $k>0$; 3) $-1\leqslant k\leqslant 1$; 4) $-\infty<k<+\infty$

шартлары үтәлгән M нокталары күплеген табыгыз.

43. O ноктасында кисешүче OA һәм OB турылары бирелгән. $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$, $\alpha\beta>0$ шартлары үтәлгән M нокталары күплеген табыгыз.

44. $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$ (монда $\overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{OB}$ — бирелгән коллинеар булмаган векторлар, O — бирелгән нокта), шул ук вакытта

$$1)\ \begin{cases}0\leqslant k\leqslant 1\\ 0\leqslant l\leqslant 1;\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases}k\geqslant 0\\ l\geqslant 0;\end{cases}\quad 3)\ l\geqslant 0;\quad 4)\ -\infty<k<+\infty$$

шартлары үтәлгән M нокталары күплеген табыгыз.

45. $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}+l\vec{a}$ (монда O һәм A — бирелгән нокталар, $\vec{a}$ — бирелгән вектор), шул ук вакытта $-1\leqslant k\leqslant 1$, $-\infty<l<+\infty$ шартлары үтәлгән M нокталары күплеген табыгыз. ($\vec{a}$ һәм $\overrightarrow{OA}$ векторлары коллинеар түгел.)

46. ABC өчпочмагы һәм ниндидер O ноктасы бирелгән.

$$\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC},\ \alpha+\beta+\gamma=1$$

шартлары үтәлгән барлык M нокталары күплеген табыгыз.

47. AB кисемтәсе һәм AB турысыныкы булмаган O ноктасы бирелгән. $\overrightarrow{OM}=l[k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}]$, шул ук вакытта $0\leqslant k\leqslant 1$, $1\leqslant l\leqslant 2$ шартлары үтәлгән M нокталары күплеген табыгыз.

48. A ноктасы һәм BC кисемтәсе бирелгән, өстәвенә $A\notin(BC)$. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$ шарты үтәлгән M нокталары күплеген табыгыз, монда O — бирелгән нокта, D — исә BC кисемтәсенең теләсә нинди ноктасы.

49. AB һәм CD кисемтәләре һәм O ноктасы бирелгән. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ шарты үтәлгән барлык M нокталары күплеген табыгыз, монда $P\in[AB]$, $Q\in[CD]$.

50*. $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммнары бирелгән. Гомуми очракта AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 кисемтәләренең урталары $A_0B_0C_0D_0$ параллелограммының түбәләре икәнен исбатлагыз. A_0, B_0, C_0, D_0 нокталары тәңгәл килерлек яки бер туры өстендә ятарлык итеп, шундый ике параллелограмм төзегез.

51*. $ABCD$ параллелограммы бирелгән. P, Q, R һәм S нокталары AB, BC, CD һәм DA якларын тигез чагыштырмада бүләләр. $PQRS$ — параллелограмм икәнен исбатлагыз.

52*. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары бирелгән. Беренче өчпочмакның медианалары икенчесенең якларына параллель булсалар, икенче өчпочмакның медианалары беренчесенең якларына параллель икәнен исбатлагыз.

53. $ABCD$ параллелограммында AB ягының уртасы M аша AC диагонален N ноктасында кисеп үтүче DM турысы үткәрелгән. $|\overrightarrow{AN}|:|\overrightarrow{NC}|$ чагыштырмасын исәпләп чыгарыгыз.

54*. $ABCD$ параллелограммының BC һәм CD яклары өстендә тиңдәшле рәвештә бу якларның урталары P һәм Q бирелгән. DP һәм AQ турылары S ноктасында кисешәләр. $|\overrightarrow{DS}|:|\overrightarrow{SP}|$ һәм $|\overrightarrow{AS}|:|\overrightarrow{SQ}|$ чагыштырмаларын исәпләп чыгарыгыз.

55*. O үзәкле әйләнә бирелгән. A, B, C, D, E нокталары әйләнәне биш конгруэнт кисәккә бүлә. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+$ $+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$ икәнен исбатлагыз.

56. ABC өчпочмагы һәм AB ягы өстендә M ноктасы бирелгән. M ноктасы аша CC_1 медианасына параллель итеп үткәрелгән туры (CA) ны P ноктасында, (CB) ны Q ноктасында кисеп үтә. $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QM}=2\overrightarrow{CC_1}$ икәнен исбатлагыз.

57. ABC өчпочмагының AB һәм BC яклары өстендә, $\overrightarrow{AM}=$ $=\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{CB}$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталары бирелгән. MN турысы AC турысын D ноктасында кисеп үтә. $\overrightarrow{AD}=n\overrightarrow{AC}$ икәнен исбатлагыз.

58. Үзәкле симметрияне һәм күчерүне эзлекле үтәү үзәкле симметрия икәнен исбатлагыз.

59. A, B һәм C нокталары — үзәкләре булган үзәкле өч симметрияне эзлекле рәвештә үтәү яңадан үзәкле симметрия икәнен исбатлагыз. Бу симметриянең үзәген төзегез.

60. $A_1B_1C_1$ өчпочмагы S үзәгенә карата ABC өчпочмагына симметрик. ABC_1 һәм A_1B_1C өчпочмакларының медианалары да S ноктасына карата симметрик икәнен исбатлагыз.

V бүлек ОХШАШЛЫК

§ 1. ГОМОТЕТИЯ

Гомотетиянең төп үзлекләре

1. Бер туры өстендә ятмаган ике параллель кисемтә: AB һәм A_1B_1 бирелгән. Нинди шарт үтәлгәндә, A ноктасын — A_1 ноктасына, B ноктасын B_1 ноктасына чагылдыручы гомотетия бар?

2. Параллель, ләкин конгруэнт булмаган AB һәм A_1B_1 кисемтәләре бирелгән. $(AB) \neq (A_1B_1)$ шарты үтәлгәндә беренче кисемтә икенчесенә чагылдырыла торган гомотетиянең үзәкләрен төзегез.

3. Нинди очракларда гомотетия күчү була?

4. Квадрат үзәген гомотетия үзәге итеп алып, квадратка гомотетик фигура төзегез. Гомотетия үзәкләрен төрлечә алганда бер үк квадрат килеп чыгуы мөмкинме?

5. $A_1B_1C_1$ өчпочмагы ABC өчпочмагына гомотетик. $A_1B_1C_1$ өчпочмагының медианалары, биссектрисалары һәм биеклекләре ABC өчпочмагының тиндәшле медианалары, биссектрисалары һәм биеклекләренә гомотетик икәнен исбатлагыз.

6. ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы G аша, аның бер ягына параллель итеп, туры үткәрегез. Килеп чыккан өчпочмак мәйданы бирелгән өчпочмак мәйданының нинди өлешен тәшкил итә?

Ике һәм аннан да күбрәк гомотетияләр

7. Коэффициентлары k һәм $\frac{1}{k}$ булган төрле үзәкле ике гомотетия бирелгән. Бу гомотетияләрне эзлекле рәвештә үтәү нинди чагылдыру була?

8. Коэффициентлары k һәм $-\frac{1}{k}$ булган ике гомотетияне эзлекле рәвештә үтәү нинди чагылдыру була?

9. Параллель күчерү һәм гомотетияне эзлекле рәвештә үтәү шул ук коэффициентлы гомотетия икәнен исбатлагыз. Бу гомотетиянең үзәген төзегез.

10. Төрле үзәкле ике гомотетия бирелгән. Бу гомотетияләрне эзлекле рәвештә үтәгәндә, нинди турылар үзенә чагыла?

11. Ике гомотетия бирелгән. Бу ике гомотетиянең уртак нокталары парын төзегез.

12. a һәм b параллель турылары бирелгән. $k=3$ коэффициенты белән a турысын b турысына чагылдыра торган гомотетияләрнең үзәкләре күплеген табыгыз.

13. Яклары тиңдәшле рәвештә бердәй юнәлешле нурлар булган ике почмак бирелгән. Бер почмакны икенчесенә чагылдыра торган гомотетияләрнең үзәкләре күплеген табыгыз (почмаклар җәелгән почмаклар түгел).

14. ABC өчпочмагының AB ягы өстендә яткан M ноктасы аша (AC) һәм (BC) га параллель турылар үткәрелгән. Килеп чыккан өчпочмаклар бирелгән өчпочмакка гомотетик. Гомотетия коэффициентларының суммасын исәпләп чыгарыгыз.

15. Өчпочмакның эчке ноктасы M аша аның якларына параллель кисүчеләр үткәрелгән. Һәр ике кисүче һәм бер як белән бирелгән өчпочмакка гомотетик өчпочмак билгеләнә. Килеп чыккан өч гомотетиянең коэффициентлары суммасын табыгыз.

Әйләнәләр гомотетиясе

16. Ике әйләнәнең ничә гомотетия үзәге бар? Ике әйләнәнең гомотетия үзәге булмавы мөмкинме? Берсе икенчесенең эчендә урнашкан ике әйләнәнең гомотетия үзәген төзегез.

17. Әйләнә үзәген — гомотетия үзәге итеп, ә гомотетия коэффициентын: 1) $k=\frac{1}{3}$; 2) $k=-\frac{1}{3}$; 3) $k=-1$; 4) $k=2$ дип алып, бирелгән әйләнәгә гомотетик фигура төзегез.

18. Әйләнә ноктасын гомотетия үзәге итеп алып, F әйләнәсенә гомотетик F_1 фигурасы төзегез.

F_1 фигурасы ул F әйләнәсенә гомотетия үзәгендә орынучы әйләнә икәнен исбатлагыз. Гомотетия коэффициенты уңай һәм тискәре сан булган очракларны тикшерегез.

19. AB һәм CD — нигезләре, M — AC һәм BD диагональләренең кисешү ноктасы булган $ABCD$ трапециясе бирелгән. ABM һәм CDM өчпочмакларын камаучы әйләнәләрнең M ноктасында орынуын исбатлагыз.

20. ABC өчпочмагында MN урта сызыгы үткәрелгән (M — $[AC]$ нең уртасы, N — $[BC]$ нең уртасы). ABC һәм MNC өчпочмакларын камаучы әйләнәләрнең C ноктасында орынуын исбатлагыз. Бу әйләнәләрнең радиуслары чагыштырмасын табыгыз.

21. Әйләнә бирелгән. Бу әйләнәдә бер очлары уртак булган барлык хордалар үткәрелгән. Шул хордаларны уртак очларыннан исәпләгәндә тигез чагыштырмада бүлә торган нокталар күплеген табыгыз.

22. Түгәрәкнең бер ноктасы аша барлык хордалары үткәрелгән. Хорда кисемтәләре шул уртак ноктадан башлап тигез чагыштырмада бүленгән. Бүлү нокталары күплеген табыгыз.

23. Бирелгән өчпочмакның урта сызыклары камаучы әйләнә үткәрелгән икенче бер өчпочмакны билгели. Бу әйләнәнең радиусы бирелгән өчпочмакны камаучы әйләнә радиусыннан ике тапкыр кечерәк икәнен исбатлагыз.

Гомотетияне геометрик мәсьәләләр чишүдә куллану

24. Трапеция нигезләренең урталары, диагональләренең кисешү ноктасы һәм ян яклары дәвамнарының кисешү ноктасы бер туры өстендә ятканлыгын гомотетия кулланып исбатлагыз.

25. $ABCD$ параллелограммының AC диагонале өстендә яткан M ноктасы аша аның якларына параллель итеп ике туры үткәрелгән. Бу вакытта бирелгән параллелограммга гомотетик ике параллелограмм барлыкка килгәнлеген, өстәвенә $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$ икәнен исбатлагыз, монда S_1, S_2 һәм S — барлыкка килгән һәм бирелгән параллелограмм мәйданнары.

26. $ABCD$ трапециясендә AC һәм BD диагональләре үткәрелгән. Алар M ноктасында кисешәләр ($[AB]$ һәм $[CD]$ — трапециянең нигезләре). ABM һәм CDM өчпочмакларының тиңдәшле рәвештә S_1 һәм S_2 гә тигез булган мәйданнары һәм трапеция мәйданы S үзара $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$ бәйләнешендә икәнен исбатлагыз.

27. ABC өчпочмагының эчке ноктасы M аша аның якларына параллель турылар үткәрелгән. Бирелгән өчпочмактан бу турылар белән кисеп алынган өчпочмакларның мәйданнары S_1, S_2, S_3 һәм бирелгән өчпочмак мәйданы S үзара $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=2\sqrt{S}$ бәйләнешендә икәнен исбатлагыз.

28. ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы G аша, AC һәм BC якларына параллель итеп, AB ягын A_1 һәм B_1 нокталарында кисеп үтүче ике нур үткәрелгән. A_1B_1G өчпочмагының мәйданы бирелгән өчпочмак мәйданының $\frac{1}{9}$ ен тәшкил иткәнлеген исбатлагыз.

29. Нигезләре уртак булган өчпочмакларның түбәләре ниндидер туры өстендә яталар. Бу өчпочмакларның медианаларының кисешү нокталары күплеге M ны табыгыз.

30. C почмагының яклары өстендә алынган A һәм B нокталары аша шул якларга перпендикулярлар торгызылган. Бу перпендикулярлар P ноктасында кисешәләр. Почмакның якларына перпендикулярлар $[AB]$ нә параллель кисемтәнең очлары аша үткәрелгәндә, P нокталары күплеге M ны табыгыз.

31. ABC өчпочмагының AB ягы өстендә, түбәләреннән башлап, конгруэнт кисемтәләр салынган һәм шул кисемтәләрнең очлары аша BC һәм AC якларына параллель турылар үткәрелгән. Бу турылар өчпочмакның CM медианасы яткан туры өстендә кисешкәнлеген исбатлагыз.

Пропорциональ кисемтәләр

32. Өчпочмакның медианасы — очлары өчпочмакның ике ягы өстендә яткан һәм медиана үткәрелгән өченче якка параллель кисемтәләрнең урталары күплеге икәнен исбатлагыз.

33. Кисешүче a һәм b турыларын тиңдәшле рәвештә A_1 һәм B_1, A_2 һәм B_2, A_3 һәм B_3 нокталарында өч параллель туры кисеп үтә. A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 кисемтәләренең урталары бер туры өстендә ятканлыгын исбатлагыз.

34. $ABCD$ трапециясендә AC һәм BD диагональләренең кисешү ноктасы S аша трапециянең нигезләренә параллель туры үткәрелгән. Бу туры аның ян яклары BC һәм AD ны тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталарында кисеп үтә. $|NS|=|SM|$ икәнен исбатлагыз.

35. Әгәр $ABCD$ дүртпочмагында капма-каршы AB һәм CD якларының урталары M һәм N, BC һәм AD якларының кисешү ноктасы S бер туры өстендә ятсалар, бу дүртпочмакның трапеция икәнен исбатлагыз.

36. $ABCD$ трапециясенең AB һәм CD нигезләренә параллель туры аны гомотетик булган $ABMN$ һәм $MNDC$ трапецияләренә бүлә. $|AB|=a$, $|CD|=b$ булса, $|MN|$ ны исәпләп чыгарыгыз.

37. $ABCD$ трапециясенең AB һәм CD нигезләре a һәм b га тигез. (AB) га параллель l турысы BC һәм DA якларын тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталарында кисеп үтә.

1) $|AN|:|ND|=k$ чагыштырмасы бирелгән. NM кисемтәсенең озынлыгы d ны исәпләп чыгарыгыз.

2) MN кисемтәсенең озынлыгы d бирелгән. $|AN|:|ND|$ чагыштырмасын исәпләп чыгарыгыз.

38. $ABCD$ трапециясендә AC һәм BD диагональләре үткәрелгән. AB нигезенә параллель l турысы $[AD]$ һәм $[AC]$ ларен — M һәм N нокталарында, ә $[BC]$ һәм $[BD]$ ларен P һәм Q нокталарында кисеп үтә. $|MN|=|PQ|$ икәнен исбатлагыз.

39. $ABCD$ параллелограммында AC һәм BD диагональләре үткәрелгән. AB ягына параллель туры AD, AC, BC һәм BD кисемтәләрен тиңдәшле рәвештә P, Q, R һәм S нокталарында кисеп үтә. $|PQ|=|RS|$ икәнен исбатлагыз.

40. Әгәр дүртпочмакта капма-каршы якларының урталары аша үтүче туры аның диагональләренең кисешү ноктасы аша үтсә, бу дүртпочмак трапеция яки параллелограмм була. Шуны исбатлагыз.

41. $ABCD$ дүртпочмагы диагональләренең кисешү ноктасы O аша аның бер ягына параллель туры үткәрелгән. Әгәр бу турының дүртпочмак белән кисешмәсе O ноктасында урталай бүленүче кисемтә булса, $ABCD$ ның трапеция икәнен исбатлагыз.

42. ABC өчпочмагында CC_1 медианасы үткәрелгән. Әгәр l турысы $l\cap[AC]=P$, $l\cap[CC_1]=Q$, $l\cap[BC]=R$, $|PQ|=|QR|$ булса, $l\parallel(AB)$ икәнен исбатлагыз.

43. ABC өчпочмагының BC ягы өстендә яткан M ноктасы аша AB һәм AC якларына параллель, ә $[AC]$ һәм $[AB]$ ең тиңдәшле рәвештә P һәм Q нокталарында кисеп үтүче турылар үткәрелгән. $\frac{|AP|}{|AC|}+\frac{|AQ|}{|AB|}=1$ икәнен исбатлагыз.

44. $ABCD$ параллелограммы бирелгән. $[AD]$ нең уртасы — M, $[CD]$ нең уртасы — N. AN кисемтәсе CM кисемтәсен — P ноктасында, BM кисемтәсе AC кисемтәсен Q ноктасында кисеп үтә. 1) $[PQ] \parallel [AD]$; 2) $|PQ| = \frac{1}{3}|AD|$ икәнен исбатлагыз.

45. Бирелгән $ABCD$ дүртпочмагына, $P \in [AB]$, $Q \in [BC]$, $R \in [CD]$, $S \in [DA]$ булырлык һәм якларын бирелгән дүртпочмакның диагональләренә параллель итеп, $PQRS$ параллелограммын камагыз.

46. $ABCD$ трапециясендә AC һәм BD диагональләре үткәрелгән. Трапециянеке булган кисемтәсе аның диагональләре белән өч конгруэнт кисәккә бүленерлек итеп, трапециянең нигезенә параллель туры төзегез.

47. $ABCD$ параллелограммында AC һәм BD диагональләре үткәрелгән. Параллелограммныкы булган кисемтәсе, аның диагональләре белән озынлыклары 1, 2, 1 саннарына пропорциональ кисәкләргә бүленерлек итеп, AB ягына паралель туры төзегез.

48. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының тиңдәшле түбәләре аша үтүче AA_1, BB_1, CC_1 турылары параллельләр. Бирелгән өчпочмакларның медианаларының кисешү нокталары аша үтүче туры AA_1 турысына параллель икәнен исбатлагыз.

49. ABC өчпочмагында медианаларының кисешү ноктасы G аша A, B түбәләре турының бер ягында, C түбәсе икенче ягында ятарлык итеп p турысы үткәрегез. A һәм B түбәләреннән p турысына кадәр ераклыклар суммасы C түбәсеннән p турысына кадәр ераклыкка тигез икәнен исбатлагыз.

50. $ABCD$ параллелограммында BD диагонале үткәрелгән. AD ягы өстендә P ноктасы бирелгән. Бу нокта аша AB га параллель итеп BD кисемтәсен — R ноктасында, BC кисемтәсен Q ноктасында кисүче l турысы үткәрелгән. $|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{PD}| = k$ булса, $|\overrightarrow{PR}| : |\overrightarrow{RQ}|$ ны исәпләп чыгарыгыз.

51. a турысы өстендә өч нокта: P, Q, R, ә a_1 турысы өстендә өч нокта: P_1, Q_1, R_1 бирелгән, өстәвенә $|PQ| : |QR| = |P_1Q_1| : |Q_1R_1|$. P, Q һәм R нокталары аша p, q һәм r параллель турылары, ә P_1, Q_1 һәм R_1 нокталары аша p_1, q_1 һәм r_1 ($p_1 \nparallel p$) параллель турылары үткәрелгән. $P_0 = p \cap p_1$, $Q_0 = q \cap q_1$, $R_0 = r \cap r_1$ нокталарының бер туры өстендә ятканлыгын исбатлагыз.

52. ABC өчпочмагы һәм $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [CA]$, $C_1 \in [AB]$ нокталары бирелгән, өстәвенә $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{B_1A}$, $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{C_1B}$. $A_1B_1C_1$ өчпочмагының медианалары бирелгән өчпочмак медианаларының кисешү ноктасы аша үткәнен исбатлагыз.

§ 2. ОХШАШЛЫК

Охшаш өчпочмаклар

1. Өчпочмакның ике медианасы кисешү ноктасы белән 2:1 чагыштырмасында бүленүен өчпочмакларның охшашлык билгеләрен файдаланып исбатлагыз.

2. ABC өчпочмагы бирелгән. Нинди шарт үтәлгәндә, C түбәсе аша, ACC_1 һәм BCC_1 өчпочмаклары охшаш булырлык итеп, AB турысын C_1 ноктасында кисүче p турысы үткәреп була?

3. Бирелгән тигезьянлы өчпочмакның нигез янындагы почмагының биссектрисасы үзенә охшаш өчпочмак кисеп алса, өчпочмакның почмакларын табыгыз.

4. Конгруэнт булмаган ике охшаш өчпочмак бирелгән. Аларның берсенең ике ягы икенчесенең ике ягына параллель. Өчпочмаклар гомотетик булырмы? Шуны ачыклагыз.

5. Кисеп алынган өчпочмак баштагысына охшаш булырлык итеп, бирелгән өчпочмакның ике ягын өченче ягына параллель булмаган туры белән кистереп буламы?

6. Өчпочмакның медианасы аны конгруэнт булмаган ике охшаш өчпочмакка бүлүе мөмкинме?

7. $|AB|=|BC|$ булган ABC тигезьянлы өчпочмагы бирелгән. Тигез булмаган AM һәм BN биеклекләре үткәрелгән. AMC һәм ABN өчпочмаклары охшашмы?

8. ABC өчпочмагы бирелгән. AA_1 һәм BB_1 биеклекләре үткәрелгән. A_1B_1C өчпочмагы ABC өчпочмагына охшаш икәнен исбатлагыз.

9. Әйләнә бирелгән. AB һәм CD хордалары M ноктасында кисешәләр. $|AM|\cdot|MB|=|CM|\cdot|MD|$ икәнен исбатлагыз.

10. Бер өчпочмакның яклары икенче өчпочмакның якларына тиңдәшле рәвештә перпендикуляр булсалар, мондый өчпочмакларның охшаш икәнен исбатлагыз.

11. Кысынкыпочмаклы ABC өчпочмагы бирелгән. AA_1 һәм BB_1 биеклекләре үткәрелгән. Бу вакытта бер-берсенә охшаш ничә өчпочмак барлыкка килгәнен санагыз.

12. ABC өчпочмагы бирелгән. H ноктасында кисешүче AA_1 һәм BB_1 биеклекләре үткәрелгән.

$$|A_1H|\cdot|A_1A|=|BA_1|\cdot|CA_1|,$$
$$|B_1H|\cdot|B_1B|=|CB_1|\cdot|AB_1|$$

икәнен исбатлагыз.

Охшаш күппочмаклар

13. Трапецияләрнең тиңдәшле яклары пропорциональ булсалар, аларның охшаш икәнен исбатлагыз.

14. Якларының озынлыгы a һәм b га тигез булган турыпочмаклык бирелгән. Килеп чыккан турыпочмаклыкларның берсе бирелгәнгә охшаш булырлык итеп, турыпочмаклыкны кисүче туры үткәрегез.

15. Якларының озынлыклары a һәм b га тигез булган турыпочмаклык бирелгән. Килеп чыккан ике турыпочмаклык охшаш булырлык итеп, турыпочмаклыкны кисүче туры үткәрегез.

16. Яклары a һәм b га тигез булган турыпочмаклык бирелгән. Турыпочмаклыкның урта сызыгы бирелгәнгә охшаш турыпочмаклык кисеп алса, a һәм b үзара нинди бәйләнештә булыр?

17. Трапециянең диагонале аны ике охшаш өчпочмакка бүлә. Бу диагональнең озынлыгы d белән трапеция нигезләренең озынлыклары a һәм b арасындагы бәйләнешне табыгыз.

18. $ABCD$ параллелограммында AC диагонале AB һәм AD яклары белән нинди почмак төзесә, $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммында A_1C_1 диагонале A_1B_1 һәм A_1D_1 яклары белән шундый ук почмак төзи. Бу параллелограммнарның охшаш икәнен исбатлагыз.

19. Ике әйләнәнең кисешү ноктасы аша, беренче әйләнәне — A_1, B_1, C_1 һәм D_1 нокталарында, икенче әйләнәне A_2, B_2, C_2, D_2 нокталарында кисүче дүрт туры үткәрелгән. A_1, B_1, C_1, D_1 һәм A_2, B_2, C_2, D_2 нокталары охшаш дүртпочмак түбәләре икәнен исбатлагыз.

20*. Ике охшаш ромб: $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ бирелгән ($\hat{A}=\hat{A}_1$). $|AC|\cdot|A_1C_1|+|BD|\cdot|B_1D_1|=4|AB|\cdot|A_1B_1|$ икәнен исбатлагыз.

Төзүгә мәсьәләләр чишүдә охшашлык методы

21. Ягы һәм икенче ягының диагональгә чагыштырмасы буенча турыпочмаклык төзегез.

22. Үзара параллель төрле өч туры: a, b, c һәм үзара параллель тагын ике туры: a_1, b_1 бирелгән. a, b, c турыларыннан төзелгән фигура a_1, b_1, c_1 турыларыннан төзелгән фигурага охшаш булырлык итеп, a_1 турысына параллель c_1 турысы төзегез.

23. Үзара параллель төрле өч туры: a, b, c һәм $A_0B_0C_0$ өчпочмагы бирелгән. $A\in a$, $B\in b$, $C\in c$ булырлык итеп, $A_0B_0C_0$ өчпочмагына охшаш ABC өчпочмагы төзегез.

24. Туры өстендә ике пар нокта: M, N һәм P, Q бирелгән. Параллель турыларның ике пары кисешкәндә квадрат барлыкка килерлек итеп, M һәм N нокталары аша параллель ике туры, P һәм Q нокталары аша да параллель ике туры үткәрегез.

25. Өч биеклеге буенча өчпочмак төзегез.

26. Бирелгән биеклеге, түбә янындагы почмагы һәм нигезенең биеклек белән бүленүдән килеп чыккан кисемтәләренең чагыштырмасы буенча өчпочмак төзегез.

27. Дүртпочмакның капма-каршы почмакларының суммасы $180°$ ка тигез булса, дүрт ягы буенча шул дүртпочмакны төзегез.

28. ABC өчпочмагына әйләнә камалган. AB ягына параллель итеп әйләнәгә үткәрелгән орынма AC һәм BC кисемтәләрен тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталарында кисеп үтә. MN кисемтәсенең озынлыгын бирелгән өчпочмакның a, b һәм c яклары озынлыгы аша күрсәтегез.

29. ABC өчпочмагында AA_1 һәм BB_1 биссектрисаларының кисешү ноктасы K аша (AB) га параллель итеп туры үткәрелгән. Бу туры (AC) һәм (BC) ны тиңдәшле рәвештә D һәм E нокталарында кисеп үтә. $|DE|=\dfrac{c(a+b)}{a+b+c}$ икәнен исбатлагыз, монда a, b, c — өчпочмак якларының озынлыклары.

30*. ABC өчпочмагында AA_1 биссектрисасы CC_1 биссектрисасын K ноктасында кисеп үтә. K ноктасы CC_1 биссектрисасын $|CK|:|KC_1|$ чагыштырмасы $(a+b):c$ чагыштырмасына тигез булырлык итеп бүлгәнен исбатлагыз, монда a, b, c — өчпочмак якларының озынлыклары.

31. ABC өчпочмагында AA_1 һәм BB_1 биссектрисалары кисешү ноктасы белән тигез чагыштырмада бүленәләр (өчпочмакның түбәсеннән исәпләгәндә). ABC өчпочмагының тигезьянлы икәнен исбатлагыз.

32. ABC өчпочмагында CC_1 биссектрисасының C_1 нигезе аша, (AC) га параллель итеп, BC ны D ноктасында кисеп үтүче туры үткәрелгән. CD кисемтәсенең озынлыгын өчпочмакның a, b, c якларының озынлыклары аша күрсәтегез.

33. ABC өчпочмагына $PQRS$ квадраты камалган, монда $P\in[AB]$, $[Q\in[AB]$, $R\in[BC]$, $S\in[CA]$. $|AB|=c$ һәм $|CC_1|=h_c$, $[CC_1]$ — өчпочмакның биеклеге булганда, квадрат ягының озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

34. $\hat{B}=90°+\hat{A}$ булган ABC өчпочмагы бирелгән. Бу өчпочмак якларының озынлыклары: a, b, һәм c арасындагы бәйләнешне табыгыз.

35. $\hat{B}=2\hat{A}$ булган ABC өчпочмагы бирелгән. Бу өчпочмак якларының озынлыклары: a, b һәм c арасындагы бәйләнешне табыгыз.

36. Тигезьянлы ABC өчпочмагында $\hat{C}=36°$, $|CA|=|CB|$. Бу өчпочмакта ян ягының озынлыгы a белән нигезенең озынлыгы c арасындагы бәйләнешне табыгыз.

37. R радиуслы әйләнәнең A ноктасыннан аның BC хордасына кадәр ераклык $d=\frac{|AB|\cdot|AC|}{2R}$ формуласы буенча исәпләп чыгарылганын исбатлагыз.

38. Әйләнәнең A һәм B нокталарына орынмалары S ноктасында кисешәләр. Әйләнәнең теләсә кайсы ноктасыннан AB турысына кадәр ераклык шул ноктаның AS һәм BS турыларына кадәр ераклыкларына урта пропорциональ икәнен исбатлагыз.

39. Әйләнә өстендә дүрт нокта: A, B, C, D бирелгән. Әйләнәнең теләсә нинди ноктасы M нан AC һәм BD, BC һәм AD, CD һәм AB турылары парына кадәр ераклыкларның тапкырчыгышлары тигез икәнен исбатлагыз.

40. R_1 һәм R_2 радиуслы ике әйләнә A һәм B нокталарында кисешәләр. A ноктасы аша үткәрелгән туры әйләнәләрне икенче тапкыр тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталарында кисеп үтә. $|BM|:|BN|=R_1:R_2$ икәнен исбатлагыз.

41. Әйләнәгә a һәм b параллель орынмалары үткәрелгән. Өченче орынма a һәм b ны тиңдәшле рәвештә A һәм B нокталарында кисеп үтеп, әйләнәгә C ноктасында орына. $|AC|=m$, $|BC|=n$ булса, a һәм b арасындагы ераклыкны исәпләп чыгарыгыз.

42. Ике охшаш турыпочмаклы өчпочмак: ABC һәм $A_1B_1C_1$ бирелгән ($\hat{C}=\hat{C}_1=90°$). a, b, c — тиңдәшле рәвештә беренче өчпочмакның гипотенузасы һәм катетлары, ә a_1, b_1, c_1 — икенче өчпочмакныкы булса, $aa_1+bb_1=cc_1$ икәнен исбатлагыз.

43. ABC өчпочмагын камаучы әйләнә төзелгән һәм A ноктасында аңа орынма үткәрелгән. B түбәсеннән, орынмага параллель итеп, AC кисемтәсен D ноктасында кисүче туры үткәрелгән. ABD һәм ABC өчпочмакларының охшаш һәм $|AB|^2=|AD|\cdot|AC|$ икәнен исбатлагыз.

VI бүлек БОРУЛАР һӘМ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛӘР

Борулар

1. O ноктасы тирәсендә: а) $-342°$; б) $650°$; в) $-780°$; г) $1200°$; д) $-2000°$ ка борганда, X ноктасының образын төзегез.

Җавапны $X_1 = R_0^{\alpha}(X)$, монда $-180° < \alpha \leqslant 180°$, тамгаланышын кулланып языгыз.

2. Бирәмлек әйләнә нокталарының координаталары нинди кыйммәтләр алуы мөмкин?

3. а) $\alpha \in [0; 90°]$; в) $\alpha \in [90°; 180°]$;
б) $\alpha \in [-90°; 0°]$; г) $\alpha \in [-90°; 180°]$

булган P_α ноктасының координаталары нинди кыйммәтләр алуы мөмкин?

Синус һәм косинус

4. Берәмлек әйләнәдә:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; в) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

булган α үзәк почмакларын төзегез.

5. Берәмлек әйләнәдә: а) $P_{20°}$; б) $P_{-75°}$; в) $P_{100°}$; г) $P_{-165°}$ нокталарын билгеләгез. Кирәкле зурлыкларны үлчәп, бирелгән почмакларның синусы һәм косинусы кыйммәтләрен күрсәтегез. (Зур төгәллеккә ирешү өчен зуррак масштаб алыгыз.)

6. Түбәндәге тригонометрик функцияләр нинди күплекләрдә билгеләнгән: а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$?

7. а) $0° < \alpha < 90°$; б) $-90° < \alpha \leqslant 0°$; в) $360° < \alpha < 450°$; г) $1000° \leqslant \alpha \leqslant 1050°$ чикләрендә урнашканда, α почмагының синусы, косинусы һәм тангенсы нинди тамгаларга ия?

8. Аңлатма кыйммәтләренең тамгасын билгеләгез: а) $\sin 100°$; б) $\cos 200°$; в) $\sin 1090°$; г) $\cos 10° \cdot \sin 210°$; д) $\cos(-3000°)$; е) $\sin 20° \cdot \sin 173°$; ж) $\operatorname{tg} 100°$; з) $\operatorname{tg} 200°$; и) $\operatorname{tg} 3000°$?

9. Түбәндәге тигезлекләр үтәлгән барлык бору почмакларының кыйммәтләрен язып чыгыгыз:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\sin\alpha = 1$; в) $\cos\alpha = -1$;
г) $\cos\alpha = 0$; д) $\sin\alpha = -1$; е) $\cos\alpha = 1$.

10. Теләсә нинди бору почмагы өчен $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geqslant 1$ тигезсезлегенең дөрес икәнен исбатлагыз.

11. Турыпочмаклы ABC өчпочмагы бирелгән, $|AB|=1$. C түбәсеннән AB гипотенузасына CD перпендикуляры торгызылган (D — перпендикулярның нигезе). а) CA, CB, DA, DB, CD кисемтәләренең озынлыкларын α га тигез булган CAB почмагының синус һәм косинус тригонометрик функцияләре кыйммәтләре аша күрсәтегез. б) $|AC|^2=|AD|\cdot|AB|$, $|CB|^2=|BD|\cdot|AB|$, $|CD|^2=|AD|\cdot|DB|$ икәнен исбатлагыз.

12. (O, R) әйләнәсенең A һәм B нокталары аша C ноктасында кисешүче орынмалар үткәрелгән. $\widehat{ACB}=60°$ булса, $|AB|$ ны исәпләп чыгарыгыз.

13. Гадиләштерегез:

а) $\cos 45°\cdot \mathrm{tg}\, 45°$; б) $\sin 85°\cdot \mathrm{tg}\, 5°$;

в) $1-\sin 18°\cdot\cos 72°$; г) $\dfrac{2\cos 2°}{\sin 92° - \cos 182°}$.

14. $\mathrm{tg}\, 5°\cdot \mathrm{tg}\, 25°\cdot \mathrm{tg}\, 45°\cdot \mathrm{tg}\, 65°\cdot \mathrm{tg}\, 85°$ тапкырчыгышын исәпләп чыгарыгыз.

VII бүлек ӨЧПОЧМАКТА МЕТРИК БӘЙЛӘНЕШЛӘР

Косинуслар теоремасы

1. ABC өчпочмагында а) $|AC| = 3$ см, $|BC| = 4$ см, $\hat{C} = 60°$; б) $|AC| = 2$ см, $|BC| = 4$ см, $\hat{C} = 150°$ булганда, AB ягының озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

2. Өчпочмакның бер почмагы α га, ә бу почмакны үз эченә алган яклары a һәм b га тигез. а) $\alpha = 45°$; б) $\alpha = 60°$; в) $\alpha = 90°$ булса, өчпочмакның өченче ягын a һәм b аша күрсәтегез.

3. Параллелограммның $45°$ ны эченә алган яклары 2 һәм 3 см га тигез. Бу почмакка каршы яткан диагональнең озынлыгын табыгыз.

4. ABC өчпочмагында $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Өчпочмак почмакларының косинусын a, b, c аша күрсәтегез.

5. ABC өчпочмагында $|AB| = 3$ см, $|BC| = 4$ см, $|AC| = 6$ см. а) A почмагының зурлыгын; б) C почмагының зурлыгын исәпләп чыгарыгыз.

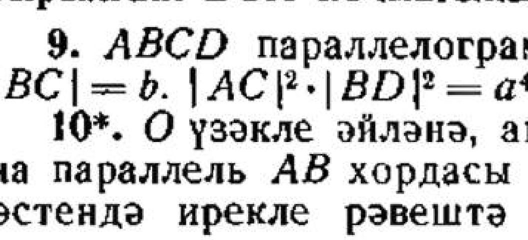
6. $ABCD$ параллелограммында $|AB| = a$, $|BC| = b$, $\hat{A} = 30°$. Бу параллелограммның диагональләре озынлыгын a һәм b аша күрсәтегез.

7. Якларының озынлыклары тиңдәшле рәвештә 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ кә тигез булган өчпочмакта иң зур почмагының зурлыгын исәпләп чыгарыгыз.

8. Өч конгруэнт квадрат 51 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә урнаштырылган. $\widehat{BCA}$ почмагының зурлыгын исәпләп чыгарыгыз.

9. $ABCD$ параллелограммы бирелгән: $\widehat{BAD} = 45°$, $|AB| = a$, $|BC| = b$. $|AC|^2 \cdot |BD|^2 = a^4 + b^4$ икәнен исбатлагыз.

10*. O үзәкле әйләнә, аның CD диаметры һәм CD диаметрына параллель AB хордасы бирелгән. Диаметры яки аның дәвамы өстендә ирекле рәвештә M ноктасы алынган. M ноктасының бирелгән торышы өчен $|AM|^2 + |BM|^2$ суммасы хорданың торышына бәйле түгеллеген исбатлагыз.



51 нче рәсем

11*. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагында ABC почмагының биссектрисасы AD ягын M ноктасында кисеп үтә, $|AM| = 2|MD|$, ә A түбәсеннән BC ягына үткәрелгән

перпендикуляр бу якны N ноктасында кисеп үтә, $|BN| = |NC|$. Әгәр дүртпочмакның периметры $p = 5 + \sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{ABC} = 60°$ булса, аның якларын исәпләп чыгарыгыз.

12. Параллелограмм диагональләренең квадратлары суммасы аның барлык якларының квадратлары суммасына тигез икәнен исбатлагыз.

Өчпочмак мәйданнарын исәпләү формулалары

13. а) $|AB| = 2$ см, $|BC| = 4$ см, $\hat{B} = 30°$;

б) $|AB| = 2$ см, $|BC| = 4$ см, $\hat{B} = 150°$ булса, ABC өчпочмагының мәйданын исәпләгез.

14. Параллелограммның диагональләре 6 һәм 8 см, ә бу яклар арасындагы почмагы 45° ка тигез булса, аның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

15. Турыпочмаклыкның диагонале 4 см, ә диагональләр арасындагы почмагы 30° булса, аның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

16. Дүртпочмакның диагональләре 8 һәм 12 см га тигез һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленәләр. Диагональләр арасындагы почмагы 30° булса, дүртпочмакның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

17. $ABCD$ дүртпочмагында $|AC| = 12$ см, $|BD| = 9$ см, $[AC] \cap [BD] = O$, $\widehat{AOB} = 45°$. $|AO| : |OC| = 1 : 2$, $|BO| : |OD| = 1 : 2$ кебек булса, бу дүртпочмакның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

18. Берсенең почмагы α, икенчесенең почмагы β һәм $\alpha + \beta = 180°$ булган ике өчпочмак бирелгән. Бу өчпочмакларның мәйданнары чагыштырмасы әлеге почмакларны чикләүче якларының тапкырчыгышлары чагыштырмасына тигез икәнен исбатлагыз.

19. Турыпочмаклы өчпочмакның бер почмагы 15°. Бу өчпочмакның мәйданын аның гипотенузасы c аша аңлатыгыз.

20. ABC өчпочмагында $|AC| = 5$ см, $|BC| = 8$ см, $\hat{C} = 60°$. C почмагының биссектрисасы CC_1 нең озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

21. ABC өчпочмагының AD биссектрисасы

$$\frac{bc \sin \hat{A}}{(b + c) \sin \frac{\hat{A}}{2}}$$

гә тигез икәнен исбатлагыз, монда b һәм c — өчпочмакның A почмагын эченә алган яклары.

22. $ABCDEF$ алтыпочмагы бирелгән. AD, BE, CF диагональләре O ноктасында кисешәләр. AOB, COD, EOF өчпочмаклары белән BOC, DOE, FOA өчпочмакларының мәйданнары тапкырчыгышы тигез икәнен исбатлагыз.

23*. ABC өчпочмагында A түбәсе аша AD турысы үткәрелгән, $D \in [BC]$, өстәвенә $\frac{|BD|}{|BC|} = a \ (a < 1)$. D ноктасы аша, AB ягына параллель итеп, AC ягын E ноктасында кисүче туры үткәрелгән. ABD һәм ECD өчпочмакларының мәйданнары чагыштырмасын исәпләгез.

Синуслар теоремасы

24. ABC өчпочмагында:

а) $|AC| = 10$ см, $\hat{B} = 30°$, $\hat{A} = 45°$;

б) $|AB| = 20$ см, $\hat{C} = 135°$, $\hat{A} = 30°$

булса, BC ягының озынлыгын исәпләгез.

25. ABC өчпочмагында:

а) $|AC| = 5$ см, $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 30°$;

б) $|AC| = 1$ см, $\hat{A} = 100°$, $\hat{C} = 50°$

булса, AB һәм BC якларының озынлыкларын исәпләгез.

26. ABC өчпочмагында:

а) $|AB| = 20$ см, $|BC| = 40$ см, $\hat{A} = 30°$;

б) $|AB| = 30$ см, $|BC| = 40$ см, $\hat{A} = 45°$

булса, B һәм C почмакларының зурлыкларын исәпләгез.

27. Параллелограммның диагонале d аның бер почмагын α һәм β почмакларына бүлә. Параллелограммның якларын d, α, β аша күрсәтегез.

28. ABC өчпочмагында $|BC| = a$, $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$. $AD \ (D \in [BC])$ биссектрисасының озынлыгын a, β һәм γ аша күрсәтегез.

29. Өчпочмакның ягы a һәм бу як янындагы почмаклары β һәм γ бирелгән. Өчпочмакның калган якларын һәм мәйданын a, β һәм γ аша күрсәтегез.

30. Өчпочмакның эчке почмагының биссектрисасы каршы яткан якны бу як янындагы почмакларның синусларына кире пропорциональ булган кисемтәләргә бүлә. Шуны исбатлагыз.

31*. Трапециянең нигезләре a һәм c га, a нигезе янындагы почмаклары α һәм β га тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.

32. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагының диагональләре яклары белән α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8 почмаклары төзиләр. Жөп индекслы почмак синуслары тапкырчыгышының так индекслы почмак синуслары тапкырчыгышына чагыштырмасын табыгыз.

33*. ABC өчпочмагы бирелгән. L ноктасы — BC ягының уртасы, K ноктасы — BL кисемтәсенең уртасы. AK һәм AL нурлары өстендә, ABC өчпочмагының тышында, LD һәм KF кисемтәләре салынган ($|LD| = |AL|$, $|KF| = \frac{1}{3}|AK|$). ABC өчпочмагы мәйданының $KLDF$ дүртпочмагы мәйданына чагыштырмасын исәпләп чыгарыгыз.

§ 1. КАМАУЛЫ ҺӘМ КАМАУЧЫ ӨЧПОЧМАКЛАР

Камаулы почмак

1. Хорда әйләнәне озынлыклары $4:5$ чагыштырмасында булган ике дугага бүлә. Әйләнә нокталарыннан бу хорда нинди почмак белән күренә (һәр ике дуга нокталары өчен дә тикшерегез)?

2. Әйләнә өч нокта белән дугаларга бүленгән. Аларның озынлыклары 2, 3 һәм 4 саннары кебек чагыштырылалар. Бүлү нокталары кисемтәләр белән тоташтырылган. Килеп чыккан өчпочмакның почмакларын исәпләгез.

3. Әйләнәгә камалган тигезьянлы өчпочмакның ян ягы $24°51'$ лы дуганы тартып тора. Өчпочмакның почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

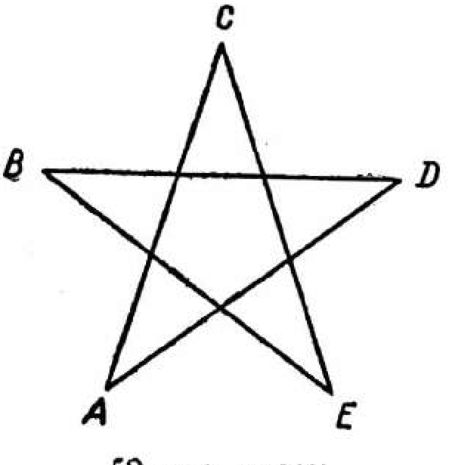
4. Бирелгән хорда әйләнәнең билгеле бер ноктасыннан $41°15'$ лы почмак ясап күренә. Хорда әйләнәне ике дугага бүлә. Бу дугаларның почмакча зурлыкларын исәпләп чыгарыгыз.

5. A, B, C, D — эзлекле рәвештә алынган әйләнә нокталары. $\smile AD = 68°$, $\smile BC = 140°$, $\smile DC = 50°$. а) $\smile AB$; б) $\widehat{BDC}$ һәм $\widehat{BAC}$; в) $\widehat{ABD}$; г) $\widehat{ABC}$; д) $\widehat{BCA}$ ны исәпләгез.

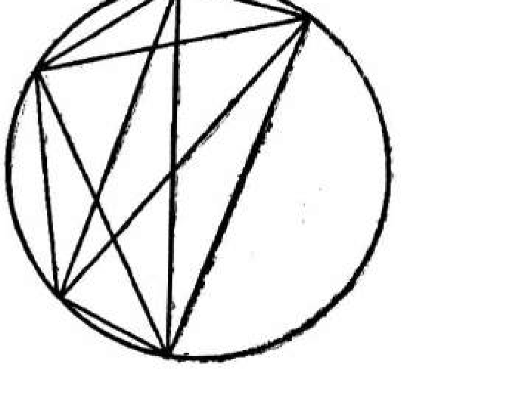
6. а) „Әгәр ..., ул вакытта ...“ рәвешендәге сүз әйләнмәләрен кулланып, 62 нче теореманы әйтеп бирегез.

б) „Әгәр камаулы почмак диаметрга таянса, ул вакытта бу почмак туры почмак була“ әйтелмәсен „Әгәр ..., ул вакытта ...“ сүз әйләнмәсен кулланмыйча әйтеп бирегез.

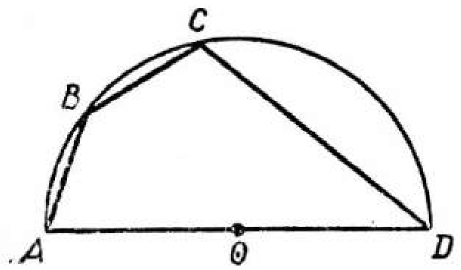
7. Әйләнә өстендә $ABCD$ квадратының түбәләре булган A, B, C, D нокталары һәм AD дугасының кечерәге өстендә яткан M ноктасы бирелгән. AMD почмагының MC һәм MB нурлары белән өч конгруэнт почмакка бүленгәнен исбатлагыз.



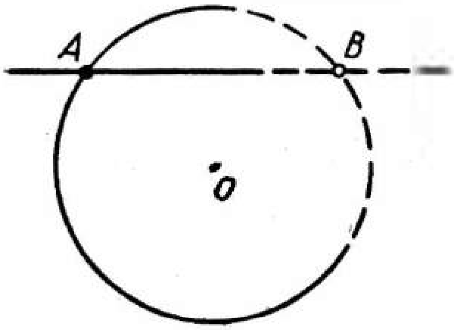
52 нче рәсем



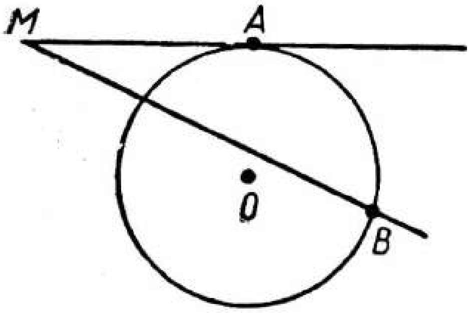
53 нче рәсем



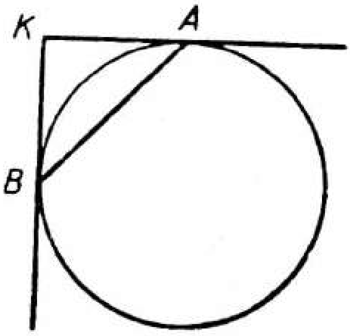
54 нче рәсем



55 нче рәсем



56 нчы рәсем



57 нче рәсем

8. а) Төзек бишпочмаклы йолдызда CAD почмагының зурлыгын исәпләп чыгарыгыз (52 нче рәсем).

б) Ирекле рәвештә алынган камаулы бишпочмакның түбәләре бер түбә аша тоташтырылган (53 нче рәсем). Килеп чыккан бишпочмаклы йолдызның кысынкы эчке почмаклары суммасын исәпләп чыгарыгыз.

9. Диаметры AD булган O үзәкле ярымәйләнәгә $ABCD$ сынык сызыгы камалган, $|AB| = |BC| = a$, $|CD| = b$ (54 нче рәсем). $[OB] \parallel [CD]$ икәнен исбатлагыз.

10*. Ниндидер туры O үзәкле әйләнәне бер диаметр өстендә ятмаган A һәм B нокталарында кисеп үтә, өстәвенә B ноктасы сызымда урнашмаган (55 нче рәсем). Бу нокта аша үтүче диаметр кисемтәсен төзегез.

11. AB дугасының уртасы MA орынмасы белән MB кисүчесеннән тигез ераклыкта түгеллеген исбатлагыз, $\smile{AB} < 180°$ (56 нчы рәсем).

12. 57 нче рәсемдә KA һәм KB нурлары әйләнәгә тиңдәшле рәвештә A һәм B нокталарында орыналар. Килеп чыккан дугаларның озынлыклары чагыштырмасы $1:4$ кебек. AKB өчпочмагының почмакларын исәпләгез.

13. ABC өчпочмагына әйләнә камалган. Ул аның якларына K, L һәм M нокталарында орынып үтә. KLM өчпочмагының кысынкы почмаклы икәнен исбатлагыз.

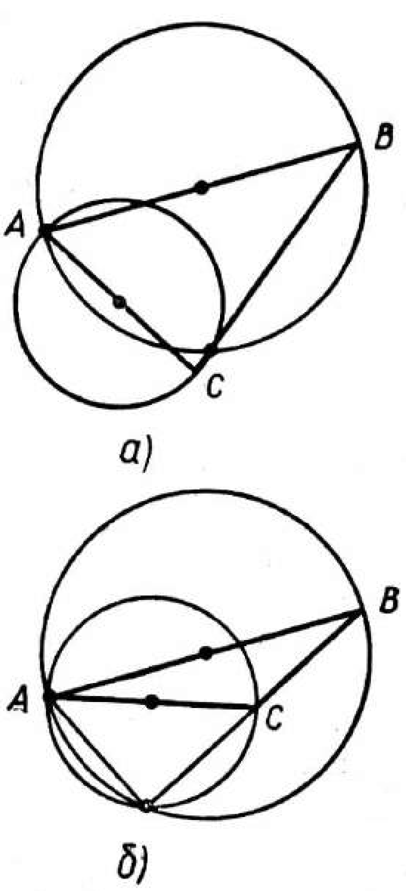
14. Бер түбәдән чыккан медианасы, биссектрисасы һәм биеклеге буенча өчпочмак төзегез.

15. Нигезе a, түбә янындагы почмагы α булган тигезьянлы өчпочмакның a ягына үткәрелгән медианасы өчпочмакның барлык медианалары арасында: а) $\alpha < 90°$ булганда иң зурысы; б) $\alpha > 90°$ булганда иң кечкенәсе икәнен исбатлагыз.

16. Өчпочмакның ике ягын диаметрлары итеп төзелгән ике әйләнәнең

өченче як өстендә яки дәвамында кисешкәнлеген исбатлагыз (58 нче рәсем).

17. $[AC]$ һәм $[BD]$ — әйләнәнең кисешүче һәм үзара перпендикуляр хордалары. A һәм B нокталарыннан DC турысына AM һәм BK перпендикулярлары үткәрелгән $(M \in (BD)$ һәм $K \in (AC))$. $AMKB$ дүртпочмагының ромб икәнен исбатлагыз.



58 нче рәсем

Камаулы һәм камаучы өчпочмаклар

18. а) Яклары 5 см, 6 см, 7 см булган өчпочмак төзегез һәм аны камаучы әйләнә үткәрегез. Бу әйләнәнең радиусын үлчәгез.

б) $|AB| = 8$ см, $|BC| = 6$ см, $\widehat{ABC} = 40°$ булса, ABC өчпочмагын төзегез. Бу өчпочмакны камаучы әйләнә үткәрегез һәм аның радиусын үлчәгез.

в) $|AB| = 6$ см, $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 60°$ булса, ABC өчпочмагын төзегез. Бу өчпочмакны камаучы әйләнә үткәрегез һәм радиусын үлчәгез.

19. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары: а) 20 һәм 21 см; б) 40 һәм 30 см булса, аны камаучы һәм аңа камаулы әйләнәләрнең радиусларын исәпләп чыгарыгыз.

20. Әйләнәгә камаулы турыпочмаклыкның яклары 15 һәм 20 см. Әйләнәнең радиусын исәпләп чыгарыгыз.

21. Кысынкыпочмаклы ABC өчпочмагы бирелгән; O — бу өчпочмакны камаучы әйләнәнең радиусы; $[AD] \perp [BC]$. $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$ икәнен исбатлагыз.

22. Өчпочмакның бер почмагы түбәсеннән үткәрелгән биеклеге, биссектрисасы һәм медианасы бу почмакны дүрт конгруэнт почмакка бүлә. Өчпочмакның почмакларын исәпләгез.

23. Турыпочмаклы өчпочмакның туры почмак түбәсеннән үткәрелгән медианасы белән биссектрисасы 10° лы почмак төзиләр. Өчпочмакның почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

24. Өчпочмакның туры почмагы түбәсеннән камаулы һәм камаучы әйләнәләрнең үзәге аша нурлар үткәрелгән. Бу нурлар үзара 7° лы почмак төзи. Өчпочмакның кысынкы почмакларын исәпләгез.

§ 2. КАМАУЛЫ ҺӘМ КАМАУЧЫ ДҮРТПОЧМАКЛАР

Камаулы дүртпочмаклар

1. Камаулы дүртпочмакның өч почмагы 2, 3 һәм 4 саннары кебек чагыштырыла. Аның почмакларын исәпләп чыгарыгыз.

2. 1) Камаулы $ABCD$ дүртпочмагының A эчке почмагы C түбәле тышкы почмагына тигез икәнен исбатлагыз.

2) Камаулы $ABCD$ дүртпочмагында A эчке почмагының биссектрисасы C түбәле тышкы почмагы биссектрисасы белән бу дүртпочмакка камаулы әйләнә өстендә кисешәләр. Шуны исбатлагыз.

3. а) $\hat{A}=78°$, $\hat{C}=102°$; б) $\hat{A}=70°$, $\hat{B}=102°$ булса, нинди очракта кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагын камаучы әйләнә үткәреп була?

4. Өч ягы конгруэнт булган трапеция төзегез һәм аны камаучы әйләнә үткәрегез.

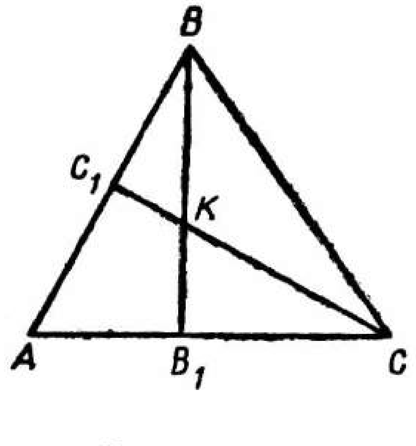
5. Дүртпочмак почмакларының биссектрисалары гомуми очракта әйләнә камарга мөмкин булган дүртпочмак төзиләр. Шуны исбатлагыз.

6. Әйләнәдә AB дугасының уртасы аша, бу әйләнәне F һәм C нокталарында, ә AB хордасын тиңдәшле рәвештә D һәм E нокталарында кисүче ирекле рәвештә алынган ике туры үтә. F, C, D һәм E нокталарының бер әйләнә өстендә ятканын исбатлагыз.[1]

7. Теләсә нинди өчпочмакта аның якларына карата биеклекләренең кисешү ноктасына симметрияле нокталар бу өчпочмакны камаучы әйләнә өстендә ятканын исбатлагыз.

8. Кысынкыпочмаклы ABC өчпочмагында K ноктасында кисешүче BB_1 һәм CC_1 биеклекләре үткәрелгән (59 нчы рәсем). A, B_1, K һәм C_1 нокталарының бер әйләнә өстендә ятканлыгын исбатлагыз.

9. Әгәр дүртпочмакта аның якларының урталарыннан үткәрелгән урта перпендикулярлары белән тәңгәл килүче симметрия күчәрләре булса, бу дүртпочмакны камаучы әйләнә үткәрергә мөмкин. Шуны исбатлагыз.



59 нчы рәсем

Камаучы дүртпочмаклар

10. Әйләнәне камаучы дүртпочмакның билгеле бер тәртиптә алынган почмаклары 1, 2, 3 һәм 2 саннары чагыштырмасында. Бу дүртпочмакка камаулы әйләнә үзәгеннән аның һәр ягы ниндидер почмак астында күренә. Шул почмакларны исәпләгез.

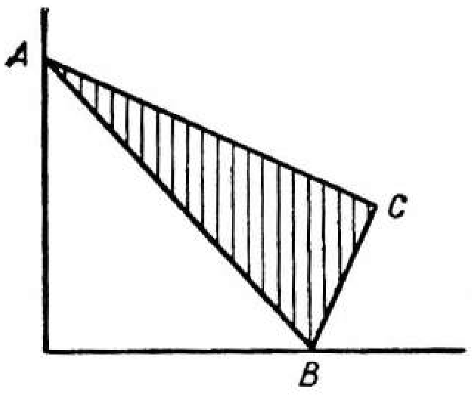
---

[1] Бу мәсьәләне түбәсе түгәрәк эчендә яткан почмакны үлчәү турындагы теореманы үткәннән соң чишәргә тәкъдим ителә.

11. Трапециягә камаулы әйләнәнең радиусы r. Орыну ноктасы трапециянең ян ягын a һәм b озынлыгындагы кисемтәләргә булә. $r^2 = ab$ икәнен исбатлагыз.

12. O үзәкле әйләнәне камаучы трапециянең ян ягы O ноктасыннан $90°$ лы почмак ясап күренгәнен исбатлагыз.

13. Әйләнә камарга мөмкин булган турыпочмаклы трапециянең мәйданы нигезләре тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.



60 нчы рәсем

14. Яклары тәртип буенча алганда a, b, c га тигез булган дүртпочмак r радиуслы әйләнәне камап тора. Бу дүртпочмакның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

Төрле мәсьәләләр

15. B түбәсе аша үтүче симметрия күчәре булган $ABCDE$ бишпочмагы O үзәкле әйләнәгә камалган. Аның AB һәм DE яклары әйләнә үзәгеннән $50°$ лы почмак астында күренә. AE ягы әйләнә үзәгеннән нинди почмак астында күренә?

16. Түгәрәкне камаучы тигезьянлы трапеция биеклегенең квадраты аның нигезләренең тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.

17. Турыпочмаклы өчпочмакның кысынкы почмак түбәләре туры почмакның яклары буйлап шуа (60 нчы рәсем). Бу өчпочмакның туры почмак түбәсе сызган сызыкны төзегез.

§ 3. ТӨЗЕК КҮППОЧМАКЛАР

Төзек күппочмаклар

1. Түгәрәкне барлык яклары конгруэнт булган күппочмак камап тора. Бу күппочмак төзекме?

2. Түгәрәкне барлык почмаклары конгруэнт булган күппочмак камап тора. Бу күппочмак төзекме?

3. Төзек $ABCDE$ бишпочмагы бирелгән. Бу бишпочмакны O үзәгенә карата сәгать йөреше уңаена $72°$ ка борганда, а) C түбәсе; б) A түбәсе; в) AC диагонале; г) ACO өчпочмагы; д) ABC өчпочмагының нинди фигураларга чагылганын күрсәтегез.

4. Төзек өчпочмакны камаучы әйләнәнең радиусы бу өчпочмакка камаулы әйләнәнең диаметрына тигез икәнен исбатлагыз.

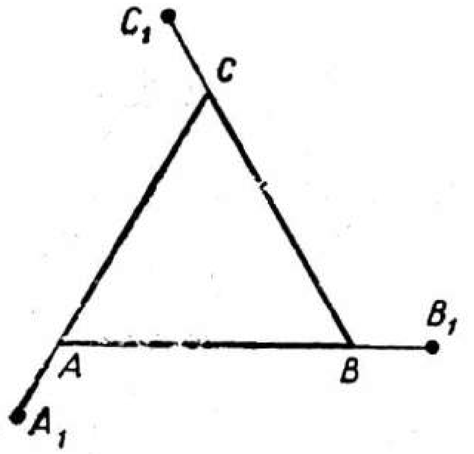
5. Ягы a га тигез булган төзек бишпочмакның диагональләрен исәпләп чыгарыгыз.

6. Төзек алтыпочмакта: а) өч пар параллель диагональ һәм аларга перпендикуляр өч диагональ барлыгын; б) төзек өчпочмакның яклары булып хезмәт иткән диагональләрнең ике өчлеге барлыгын исбатлагыз.

7. Төзек бишпочмакның диагональләре үзара кисешкәндә төзек бишпочмак төзиләр. Шуны исбатлагыз.

8. O үзәкле әйләнәнең B ноктасыннан BA һәм BC хордалары үткәрелгән. $[AB]$ — камаулы төзек өчпочмакның ягы, $[BC]$ — камаулы квадратның ягы. ABC почмагының зурлыгын исәпләгез.

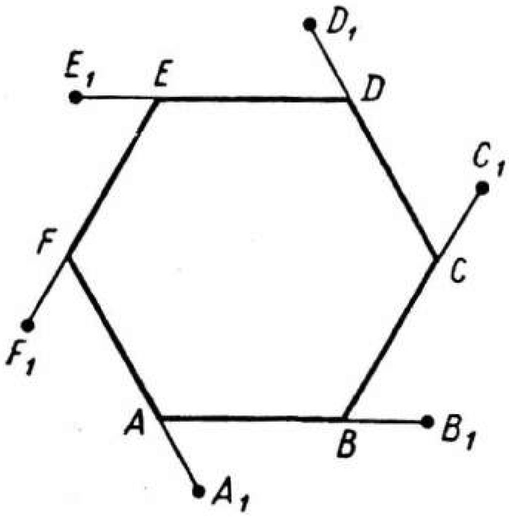
9. Әйләнәнең A ноктасыннан AB һәм AC хордалары үткәрелгән. $[AB]$ — камаулы төзек алтыпочмакның ягы, $[AC]$ — камаулы квадратның ягы. BAC почмагының зурлыгын исәпләгез.



61 нче рәсем

10. а) Төзек өчпочмакның яклары 61 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә дәвам ителгән. $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$. A_1, B_1, C_1 — төзек өчпочмакның түбәләре икәнен исбатлагыз.

б) Төзек алтыпочмакның яклары, 62 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, бер үк ераклыкка дәвам ителгән. A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 — төзек алтыпочмакның түбәләре икәнен исбатлагыз.



62 нче рәсем

11. а) Квадрат һәм алтыпочмак;

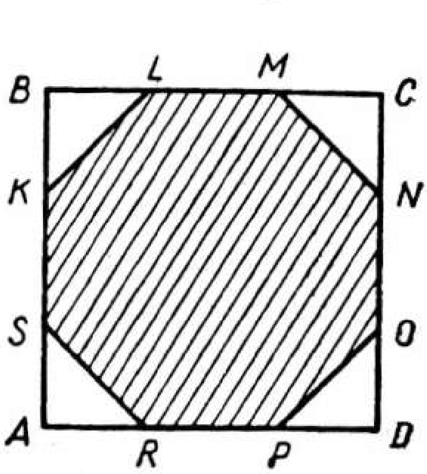
б) алтыпочмак, квадрат һәм өчпочмак;

в) алтыпочмак һәм өчпочмак;

г) сигезпочмак һәм квадрат;

д) уникепочмак һәм өчпочмаклар белән яссылыкны, ачыклык калдырмый һәм бер-берсенә каплатмый тулысынча ябу өчен, бу төзек күппочмакларның яклары нинди чагыштырмада булырга тиеш?

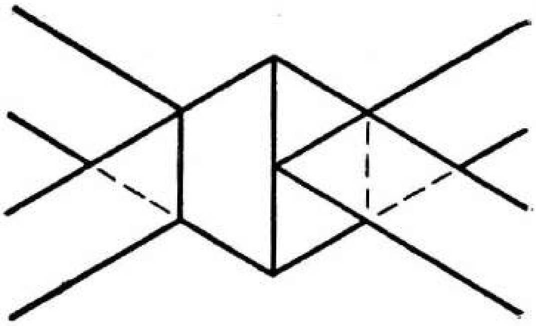
Һәр биремгә карата нинди дә булса бер вариантны тикшереп, тиешле сызымын сызыгыз.



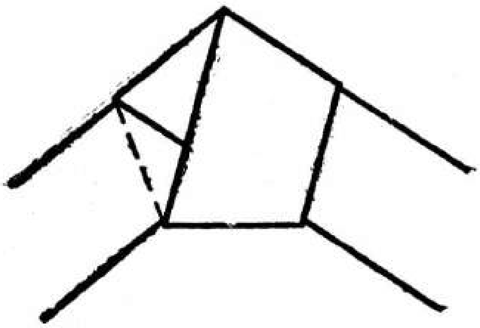
63 нче рәсем

12. a яклы квадратның һәр түбәсеннән башлап аның яклары өстендә диагоналенең яртысына тигез булган кисемтәләр салынган. Килеп чыккан сигез нокта эзлекле рәвештә тоташтырылган (63 нче рәсем). Килеп чыккан сигезпочмакның төрен билгеләгез һәм мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

13. Периметрлары тигез булган төзек өчпочмакның, квадратның һәм төзек алтыпочмакның мәйданнары чагыштырмасын исәпләп чыгарыгыз.



64 нче рәсем



65 нче рәсем

Төзек күппочмакның мәйданы

14. а) Төзек өчпочмакның ягы a белән биеклеге h ның суммасы k га тигез. Бу өчпочмакның мәйданын k аша күрсәтегез.

б) Төзек өчпочмакның ягы белән биеклегенең аермасы m га тигез. Бу өчпочмакның мәйданын m аша күрсәтегез.

15. $O\,(0;\ 0)$ үзәкле әйләнә $(12;\ -5)$ координаталы нокта аша үтә. Бу әйләнәгә камаулы а) төзек өчпочмакның; б) квадратның; в) төзек бишпочмакның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

Төрле мәсьәләләр

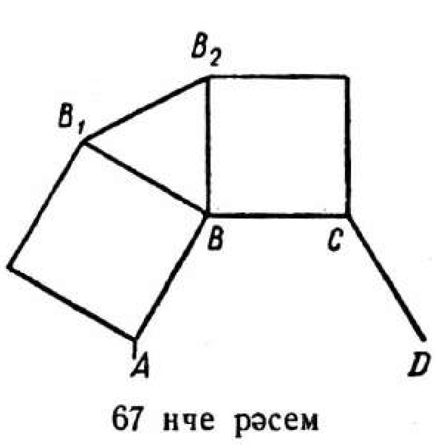
16. а) Бердәй киңлектәге ике кәгазь тасмадан, 64 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, төзек алтыпочмак китереп чыгарырга мөмкин. Бу алтыпочмакның төзек икәнен исбатлагыз.

б) Бердәй киңлектәге кәгазь тасма, 65 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, гади төен итеп бәйләнгән. Бу төеннең төзек бишпочмак формасында икәнен исбатлагыз.

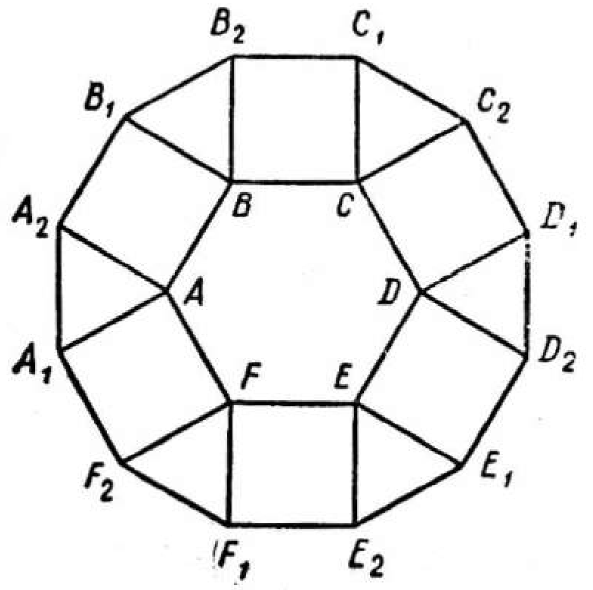
17. 66 нчы рәсемдә кысынкы почмагы $60°$ булган йолдызсыман төзек бишпочмак сурәтләнгән. а) Мондый фигура килеп чыксын өчен бер бит кәгазьне ничек бөкләргә һәм кисү сызыгы ничек урнашкан булырга тиеш? б) Кисеп алынган бишпочмак төзек булсын өчен, кисү сызыгы ничек үтәргә тиеш?

18. Ниндидер әйләнәнең OA радиусының уртасы B аша әйләнәне K ноктасында кисүче перпендикуляр үткәрелгән. BK кисемтәсен якынча шул әйләнәгә камаулы төзек җидепочмакның ягы дип алырга мөмкин. Бу вакытта җибәрергә мөмкин булган хатаны табыгыз.

66 нчы рәсем



67 нче рәсем



68 нче рәсем

19. Төзек сигезпочмакның капма-каршы ике ягы һәм аларга перпендикуляр диагональләре турыпочмаклык төзиләр. Турыпочмаклыкның мәйданын сигезпочмакның ягы a аша күрсәтегез.

20. Барлык яклары һәм эзлекле килгән өч почмагы конгруэнт булсалар, андый сигезпочмакның төзек икәнен исбатлагыз.

21. а) Төзек $ABCDEF$ алтыпочмагының яклары өстендә, аның тышында, квадратлар төзелгән. BB_1B_2 нең төзек өчпочмак икәнен исбатлагыз.

б) Төзек алтыпочмакның һәр ягы өстендә, аның тышында, квадратлар төзелгән һәм аның түбәләре, 68 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, турылар белән тоташтырылган. $A_1A_2B_1B_2 \dots F_1F_2$ уникепочмагының төзек икәнен исбатлагыз.

22. AB — түгәрәккә камаулы квадратның ягы. $|AB| = |BK|$, O — түгәрәк үзәге. KM кисемтәсе бу түгәрәккә камаулы төзек унпочмак ягының икеләтелгәненә тигез икәнен исбатлагыз (69 нчы рәсем).

23. Бирелгән квадратка, бер түбәсе квадратның ягы өстендә ятарлык итеп, тигезьяклы өчпочмак камагыз.

24. Ягы a га тигез булган $ABCDEF$ төзек алтыпочмагында EF һәм CD якларының дәвамнары N ноктасында кисешәләр (70 нче рәсем). Бу алтыпочмакны камаучы әйләнәнең үзәге — O. BN турысы ED, OD һәм OC кисемтәләрен тиңдәшле рәвештә L, K һәм M нокталарында кисеп үтә. EL, OM, OK кисемтәләренең озынлыгын һәм штрихланган өчпочмак мәйданын a аша күрсәтегез.

§ 4. ӘЙЛӘНӘ ОЗЫНЛЫГЫ ҺӘМ ТҮГӘРӘК МӘЙДАНЫ

Әйләнә озынлыгы

1. Әйләнәнең а) 30° лы дугасының озынлыгы 5 см; б) 60° лы дугасының озынлыгы 10 см; в) 300° лы дугасының озынлыгы 50 см булса, әйләнә озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

2. $O(0;\ 0)$ ноктасы үзәге булган әйләнә $(3;\ -4)$ ноктасы аша үтә. Бу әйләнәнең озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.

3. а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 90°$; в) $\alpha = 120°$; г) $\alpha = 240°$; д) $\alpha = 300°$ булганда, почмакча зурлыгы α га тигез булган дуга озынлыгының шул дуганы тартып торган хорда озынлыгына чагыштырмасын исәпләп чыгарыгыз.

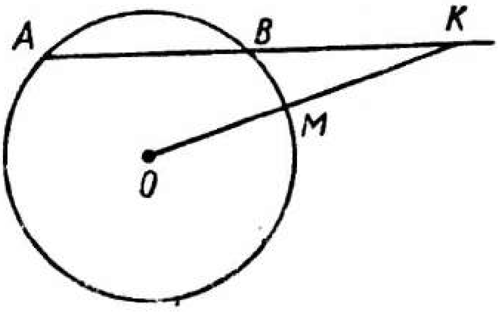
4. R радиуслы әйләнә озынлыгын әйләнә диаметрының өчләтелгәне һәм шул әйләнәгә камаулы квадрат ягының 0,2 се суммасына

якынча тигез булган кисемтә озынлыгы белән алмаштырырга мөмкин. Бу алмаштыруның хатасын һәм чагыштырма хатасын табыгыз.

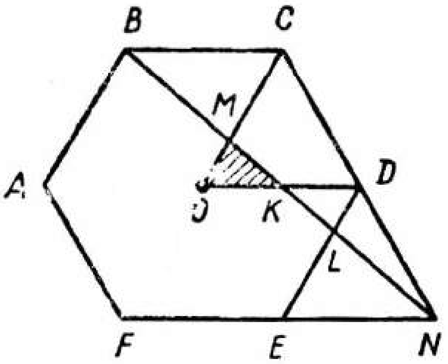
5. Туры почмакка 5 см радиуслы әйләнә камалган. Бу почмакның яклары һәм әйләнәнең почмак якларына орыну ноктасы белән чикләнгән дугасы арасында урнашкан фигураның периметрын исәпләп чыгарыгыз.

6*. R радиуслы түгәрәккә, һәркайсы калган ике түгәрәккә орынырлык итеп, бер үк диаметрлы өч түгәрәк камалган. Штрихланган фигураның периметрын исәпләп чыгарыгыз (71 нче рәсем).

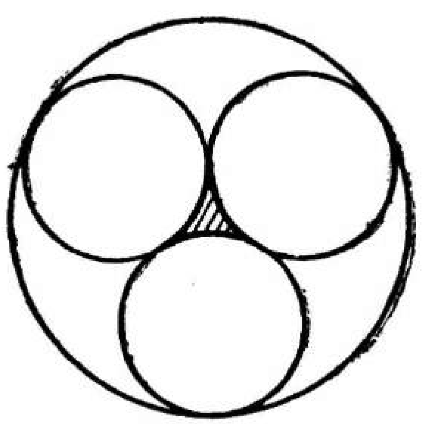
7. Үзәге O булган R радиуслы әйләнәдә AA_1 диаметрының A очы аша бу әйләнәгә орынма үткәрелгән (72 нче рәсем). AB — әйләнәгә камаулы төзек алтыпочмакның ягы, OC — AB хордасының уртасы аша үтүче нур. C ноктасы орынма өстендә ята. CD кисемтәсенең озынлыгы әйләнә радиусының өчләтелгәненә тигез. A_1D кисемтәсенең озынлыгы якынча R радиуслы ярымәйләнәнең озынлыгына тигез икәнен күрсәтегез.

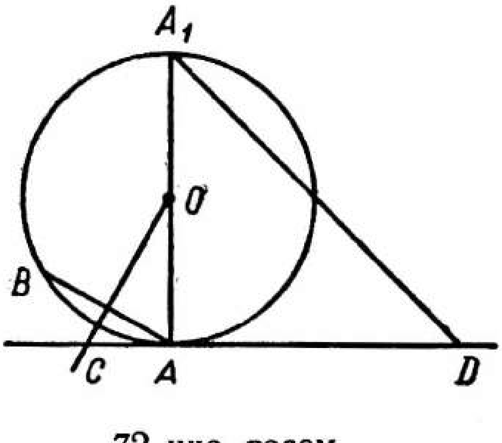


69 нчы рәсем



70 нче рәсем


71 нче рәсем



72 нче рәсем

Түгәрәк мәйданы

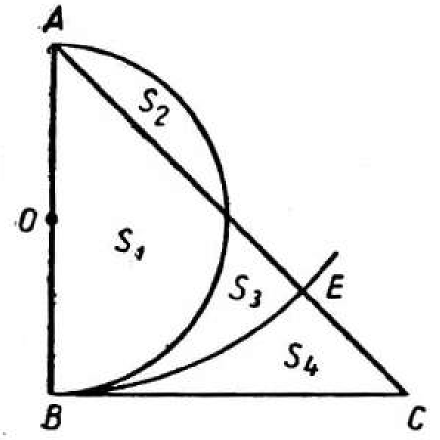
8. $O(0; 0)$ үзәкле әйләнә координаталары $(3; -4)$ булган нокта аша үтә. Бу әйләнә белән чикләнгән түгәрәкнең мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

9. а) Ягы 10 см га тигез булган тигезьяклы өчпочмакны камаучы түгәрәкнең;

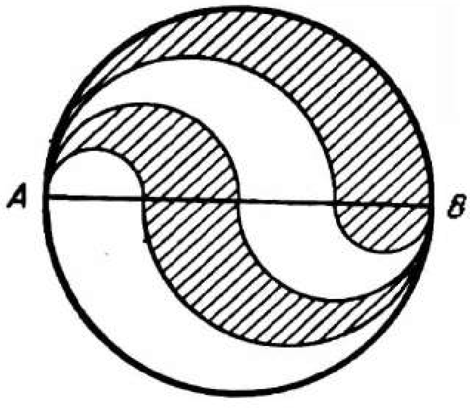
б) ягы 10 см га тигез булган төзек алтыпочмакны камаучы түгәрәкнең;

в) ягы 10 см га тигез булган төзек сигезпочмакны камаучы түгәрәкнең мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

10. а) Ягы 10 см булган төзек алтыпочмакка камаулы түгәрәкнең мәйданын;



73 нче рәсем



74 нче рәсем

б) ягы 10 см булган төзек сигезпочмакка камаулы түгәрәкнең мәйданын табыгыз.

11. Ике концентрик әйләнә белән төзелгән бокра мәйданы диаметры зур әйләнәнең кечерәк әйләнәгә орынган хордасына тигез булган түгәрәк мәйданына тигез. Шуны исбатлагыз.

12. Туры почмакка 5 см радиуслы әйләнә камалган. Бу почмакның яклары һәм әйләнәнең почмак якларына орыну нокталары белән чикләнгән дугасы арасында урнашкан фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

13. Тигезьянлы турыпочмаклы ABC өчпочмагының ($\hat{B}=90°$) $|AB|=2a$ булган AB катетын диаметр итеп алып, 73 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, ярымәйләнә төзелгән һәм, A ноктасын үзәк итеп алып, AC гипотенузасын E ноктасында кисүче $2a$ радиуслы әйләнә дугасы үткәрелгән. S_1, S_2, S_3 һәм S_4 фигураларының мәйданнарын исәпләп чыгарыгыз.

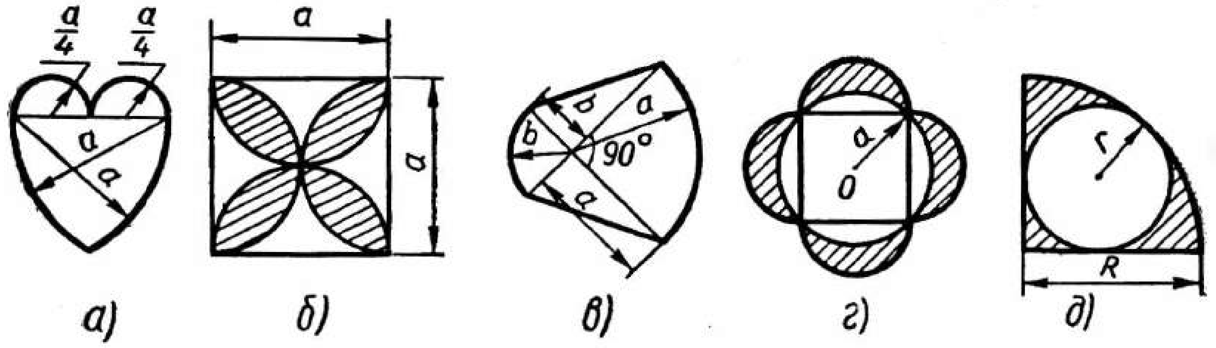
14. а) AB диаметры 4 конгруэнт кисемтәгә бүленгән һәм бу кисемтәләр өстендә, 74 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, ярымәйләнәләр төзелгән. $|AB|=d$ булса, штрихланган һәр фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

б) Шул ук мәсьәләне AB кисемтәсе n конгруэнт кисемтәгә бүленгән очрак өчен эшләгез.

15. R радиуслы әйләнә икенче әйләнәнең үзәге аша үтә. Бу әйләнәләрнең кисешү нокталары беренче әйләнәнең диаметры өстендә ята. Штрихланган кисәкнең мәйданын R аша күрсәтегез (75 нче рәсем).

75 нче рәсем

76 нчы рәсем



77 нче рәсем

16. Тигезьяклы өчпочмакның һәр түбәсеннән аның ягына тигез булган радиус белән дуга үткәрелгән. Өчпочмакның калган ике түбәсе бу дуганың очлары булып хезмәт итә. Штрихланган фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз (76 нчы рәсем).

17. r радиуслы өч конгруэнт түгәрәк үзара пар-пар орыналар. Штрихланган фигураның мәйданын исәпләп чыгарыгыз (71 нче рәсем).

18. Фигураның периметрын һәм мәйданын (77 нче рәсем, *а*, *в*) яки аның штрихланган кисәгенең мәйданын табыгыз (77 нче рәсем, *б*, *г*, *д*).

Һәр фигураның ничә симметрия күчәре бар?

Кайсы фигураларның симметрия үзәге бар?

Һәр фигураны үзенә чагылдыра алган күчүләрне әйтеп чыгыгыз.

IX бүлек СТЕРЕОМЕТРИЯДӘН БАШЛАНГЫЧ МӘГЪЛУМАТЛАР

§ 1. ПРОСТРАНСТВОДА НОКТАЛАРНЫҢ, ТУРЫЛАРНЫҢ ҺӘМ ЯССЫЛЫКЛАРНЫҢ ҮЗАРА ТОРЫШЫ

Туры һәм яссылыкларның төп үзлекләре

1. Куб түбәләренең барлык парлары белән төрле ничә туры билгеләнә?

2. Кубның барлык түбәләрен өчәр-өчәр итеп группаласак, алар белән төрле ничә яссылык билгеләнә?

3. Бирелгән алты ноктаны парлап алганда, бу парлар белән төрле ничә туры билгеләнә?

4. Бирелгән биш ноктаны өчәрләп алганда, алар белән төрле ничә яссылык билгеләнә?

5. Төрле ике яссылыкның ике һәм бары тик ике генә уртак ноктасы була алмавын исбатлагыз.

6. Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән (78 нче рәсем). Параллелепипедның ике түбәсе аша үтүче ничә туры:

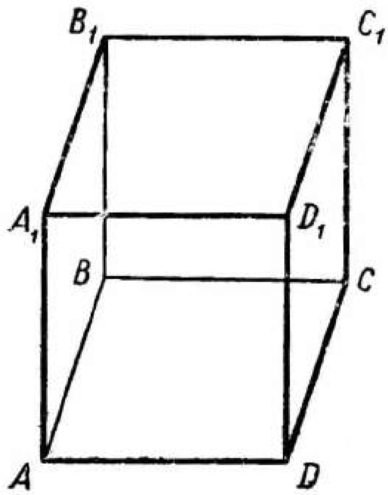
а) AB кабыргасы белән кисешә; б) AB кабыргасына параллель?

7. Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән (78 нче рәсем). Бу параллелепипедның кайсы кабыргалары: а) AD турысы белән чалышма булган; б) AD һәм DD_1 турылары белән чалышма булган турылар өстендә яталар?

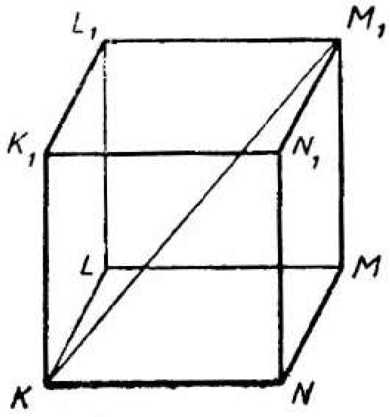
8. $KLMNK_1L_1M_1N_1$ кубында KM_1 диагонале үткәрелгән (79 нчы рәсем). Кубның түбәләре парлап алынганда бу түбәләр аша KM_1 турысына чалышма булган ничә туры үтә?

9. Кубның түбәләрен өчәрләп алганда, бу түбәләр белән төрле ничә пар параллель яссылык билгеләнә?

10. Һәр яссылык кубның кимендә өч түбәсен үз эченә алса, аның бер түбәсе аша үзара кисешүче төрле ничә яссылык үтә?



78 нче рәсем



79 нчы рәсем

11. Ике чалышма туры: a, b һәм бу турылар өстендә ятмаган A ноктасы бирелгән. A ноктасы аша үтеп, бирелгән ике турыны да кисүче турының бердән күп булмавын исбатлагыз.

12. α яссылыгы һәм бу яссылыкны кисүче a турысы бирелгән. α яссылыгында яткан b турысының a турысына параллель түгеллеген исбатлагыз.

13. Бирелгән α яссылыгында ятмаган M ноктасы аша бу яссылыкка параллель чиксез күп туры үткәнлеген исбатлагыз.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бирелгән (80 нче рәсем). Бу кубның кайсы да булса ике түбәсе аша үтүче ничә туры: а) ABB_1A_1 кырына параллель; б) ABB_1A_1 кырын кисеп үтә?

Туры белән яссылыкның үзара торышы. Яссылыкка перпендикуляр

15. α яссылыгыннан a ераклыктагы M ноктасыннан бу яссылыкка перпендикуляр үткәрелгән.

1) M ноктасыннан α яссылыгында яткан турыларга кадәр ераклык: а) a га тигез; б) a дан зуррак булганда, бу турылар әлеге перпендикулярга карата ничек урнашканнар?

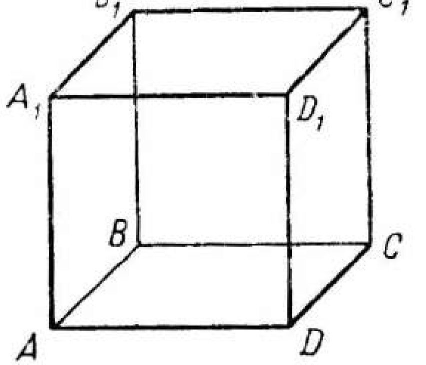
2) α яссылыгында M ноктасыннан ераклыгы a дан кечерәк булган туры бармы?

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бирелгән (81 нче рәсем), T һәм K ноктaлары — CD һәм AD кабыргаларының урталары. D ноктасыннан: а) ABB_1A_1 кыры яссылыгына кадәр; б) CT кисемтәсенә кадәр; в) KT кисемтәсенә кадәр; г) AB кабыргасына кадәр; д) BC кабыргасына кадәр; е)* AC_1 турысына кадәр; ж*) A_1C_1 турысына кадәр ераклыкны күрсәтегез.

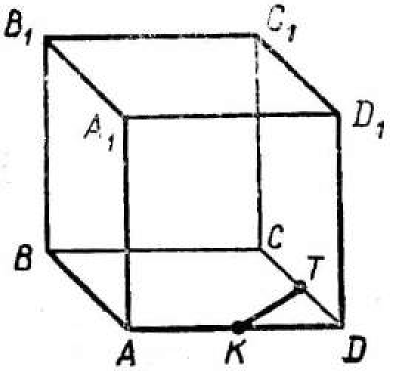
17. Кисешүче ике яссылык: $\alpha \cap \beta = (BC)$ һәм a, b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$) турылары бирелгән. а) a һәм b турыларының параллель булуы; б) a һәм b турыларының кисешүе; в) a һәм b ның чалышма турылар булуы мөмкинме? Һәр җавапның рәсемен сызыгыз.

Параллель яссылыклар

18. Ике параллель яссылык: $\alpha \parallel \beta$ һәм ике туры: a һәм b $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$) бирелгән. а) a һәм b турыларының параллель булуы; б) a һәм b ның чалышма турылар булуы; в) a һәм b турыларының кисешүе мөмкинме?



80 нче рәсем



81 нче рәсем

19. Бер үк турыга перпендикуляр яссылыкларның үзара параллель икәнен исбатлагыз.

20. Бер үк яссылыкка перпендикуляр ике турының кисешмәвен исбатлагыз.

21. Үзара параллель α һәм β яссылыклары арасындагы ераклык m га тигез. α яссылыгында M ноктасы бирелгән.

а) β яссылыгында M ноктасыннан ераклыгы m га тигез булган ничә туры ята?

б) β яссылыгында M ноктасыннан ераклыгы n $(n > m)$ га тигез булган ничә туры ята?

Һәр җавапның рәсемен ясагыз.

22. α яссылыгы һәм бу яссылыкка параллель булган a турысы бирелгән. a турысыннан α яссылыгына кадәр ераклык m га тигез.

а) α яссылыгында a турысыннан ераклыгы m га тигез булган ничә туры ята?

б) α яссылыгында a турысыннан ераклыгы n $(n > m)$ га тигез булган ничә туры ята?

Ортогональ проекцияләү

23. Тигезьянлы ABC өчпочмагының AC нигезе аша α яссылыгы үткәрелгән. ABC өчпочмагының бу яссылыкка проекциясе:

а) кисемтә; б) тигезьянлы өчпочмак; в) төрле яклы өчпочмак булуы мөмкинме?

24. Нинди очракта a турысы һәм бу турының бирелгән α яссылыгына проекциясе параллель булалар?

25. Трапециянең яссылыкка проекциясе: а) кисемтә; б) трапеция; в) өчпочмак булуы мөмкинме?

26. Параллелограммның бер ягы аша үтүче яссылыкка әлеге параллелограммның проекциясе: а) кисемтә; б) параллелограмм булуы мөмкинме?

27. A һәм B нокталары α яссылыгына тиңдәшле рәвештә A_1 һәм B_1 нокталарына проекцияләнә. Бу вакытта а) $|AB| > |A_1B_1|$; б) $|AB| < |A_1B_1|$; в) $|AB| = |A_1B_1|$ очракларының булуы мөмкинме?

28. Нинди очракта әйләнәнең бирелгән яссылыкка проекциясе әйләнә була?

§ 2. ӨСЛЕКЛӘРНЕҢ МӘЙДАННАРЫ ҺӘМ КАЙБЕР ҖИСЕМНӘРНЕҢ КҮЛӘМНӘРЕ

Туры призма

1. Өчпочмаклы төзек призманың нигез ягы a һәм биеклеге h: а) $a = 5$ см, $h = 8$ см; б) $a = 0{,}25$ м, $h = 0{,}9$ м булганда, аның күләмен, ян өслеге мәйданын һәм өслек мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

2. Нигезендә параллелограмм яткан туры параллелепипед бирелгән. a һәм b — параллелограммның яклары, α — шул яклар арасындагы почмагы, h — параллелепипедның биеклеге. Бу параллелепипедның күләмен һәм өслек мәйданын a, b, h, α аша күрсәтегез һәм, $a = 4$ м, $b = 6$ м, $h = 8$ м, $\alpha = 40°$ булганда, параллелепипед күләме һәм өслек мәйданының кыйммәтләрен исәпләп чыгарыгыз.

3. Өчпочмаклы, дүртпочмаклы һәм алтыпочмаклы төзек призмаларның нигез периметрлары тигез. Әгәр бу призмаларның биеклекләре тигез булса, кайсының күләме зуррак, кайсының күләме кечкенәрәк була?

4. Нигезендә r радиуслы әйләнәне камаучы дүртпочмак яткан туры призма бирелгән. P — призманың нигез периметры, h — биеклеге. Бу призманың өслек мәйданын һәм күләмен r, h, P аша күрсәтегез һәм, $r = 5$ дм, $h = 8$ дм, $P = 40$ дм булганда, өслек мәйданының һәм күләменең кыйммәтләрен исәпләп чыгарыгыз.

5. Нигезенә r радиуслы әйләнә камалган төзек n-почмаклы призма бирелгән. Призманың биеклеге $2r$ га тигез. а) $n = 3$, б) $n = 4$; в) $n = 6$ булганда, призманың өслек мәйданын һәм күләмен r аша күрсәтегез. 1) $r = 6$ м; 2) $r = 2$ м булса, призманың өслек мәйданын һәм күләмен исәпләп чыгарыгыз.

6. Траншеяның аркылы кисеме — нигезләре a һәм b, биеклеге h булган тигезьянлы трапеция. Траншеяның озынлыгы l. Траншеяның күләмен a, b, h һәм l аша күрсәтегез һәм, $a = 4$ м, $b = 3$ м, $h = 2$ м, $l = 20$ м булса, траншеяның күләмен исәпләп чыгарыгыз.

Күләмнәрнең гомуми үзлекләре

7. 1) Күпкырлыкның һәр күпкырлыкка билгеле бер санны — күпкырлыкның күләмен — тиңдәш итәргә мөмкинлек бирүче төп үзлекләрен санап чыгыгыз.

2) а) Кисемтәләрнең озынлыкларын; б) мәйданнарны үлчәгәндә кабул ителгән шуңа аналогик үзлекләрне күрсәтегез.

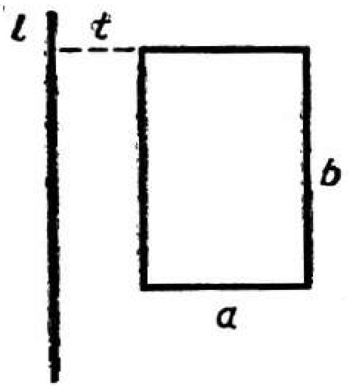
8. а) Үлчәнешләренең һәркайсы озынлык үлчәү берәмлеге l ның бөтен сан кыйммәтенә ия булмаса, турыпочмаклы параллелепипедның күләме үлчәү берәмлеге l^3 ның бөтен сан кыйммәте белән аңлатылуы мөмкинме? (Җавапны мисал белән аңлатыгыз).

б) Озынлык үлчәү берәмлеге l, күләм үлчәү берәмлеге l^3 булганда, кубның күләме һәм өслек мәйданы бер үк санча кыйммәткә ия булуы мөмкинме?

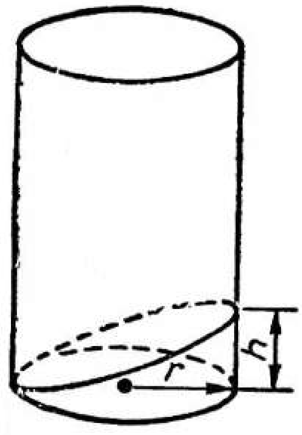
Пирамидалар

9. Өчпочмаклы туры призманы иң азы ничә өчпочмаклы пирамидага кисеп була?

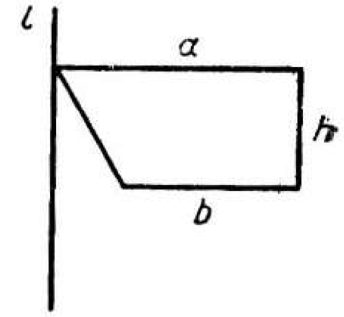
10. а) Кубны; б) дүртпочмаклы туры призманы иң азы ничә дүртпочмаклы пирамидага кисеп була?



82 нче рәсем



83 нче рәсем



84 нче рәсем

11. n нинди кыйммәтләргә ия булганда, n-почмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы:

а) шул пирамиданың ян кабыргасына;

б) шул пирамиданың ян кыры апофемасына тигез булуы мөмкин?

12. Нигезе r радиуслы әйләнәгә камалган, ә биеклеге h ка тигез булган n-почмаклы төзек пирамида бирелгән. Пирамиданың күләмен һәм ян өслеге мәйданын r, n һәм h аша күрсәтегез.

Цилиндр

13. Цилиндр бирелгән. Аның нигезендә ягы a га тигез булган төзек n-почмакка камаулы түгәрәк ята, биеклеге түгәрәк диаметрына тигез. Цилиндрның күләмен һәм өслек мәйданын a, n аша күрсәтегез.

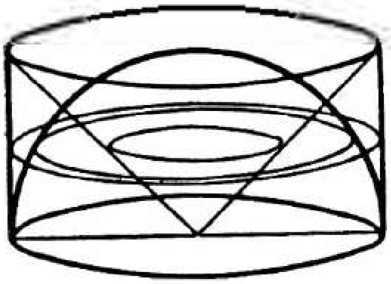
14. Яклары a һәм b булган турыпочмаклык бирелгән. l турысы турыпочмаклык яссылыгында ята һәм аның бер ягына параллель, ә икенче ягыннан t ераклыгында тора (82 нче рәсем). Бу турыпочмаклыкны l күчәре тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан фигураның күләмен a, b һәм t аша күрсәтегез. $a = 1{,}5$ дм, $b = 20$ дм, $t = 4$ дм булганда, бу күләмне исәпләп чыгарыгыз.

15. Цилиндрдан яссылык белән цилиндрик тояк дип аталган кисәге кистереп алынган (83 нче рәсем). Рәсемдә күрсәтелгән үлчәнешләре буенча шул тоякның күләмен исәпләп чыгарыгыз.

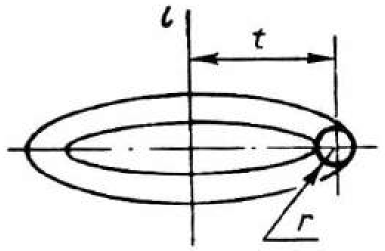
Конус

16. Конусның нигезендә ягы a га тигез булган төзек n-почмакка камаулы түгәрәк ята. а) Мондый конусның төзүчесе нинди кыйммәтләр алуы мөмкин? б) Нинди очракта конусның төзүчесе a га тигез?

17. Конус бирелгән. Аны конусның түбәсе һәм нигез диаметры аша үтүче яссылык белән кистергәндә, кисемдә ягы a булган тигезьяклы өчпочмак килеп чыга. Бу конусның күләмен һәм өслек мәйданын a аша күрсәтегез.



85 нче рәсем



86 нчы рәсем

18. Нигез яклары a һәм b, биеклеге h булган турыпочмаклы трапеция, 84 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, нигезенә перпендикуляр күчәр тирәсендә әйләнә. Әйләнү вакытында килеп чыккан фигураның күләмен табыгыз.

Шар

19. Яссылыкта r радиуслы n шарның һәркайсы калган ике шарга орынып торырлык итеп урнашкан. Килеп чыккан тишем аша үтәрлек итеп, шушы яссылыкта урнаштырырга мөмкин булган иң зур шарның радиусын табыгыз.

20. 1) Нигез радиусы һәм биеклеге a га тигез булган цилиндр, биеклеге шундый ук булган һәм шул ук нигез өстендә төзелгән конус һәм зур түгәрәге цилиндр нигезе белән тәңгәл килүче ярымшар бирелгән. Фигуралар 85 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә урнашканнар. Шул ук рәсемдә әлеге фигураларның цилиндр нигезләренә параллель яссылык белән кистерүдән килеп чыккан кисемнәре күрсәтелгән. Ярымшар белән кисешүдән барлыкка килгән түгәрәк мәйданының цилиндр һәм конус белән кисешүдән килеп чыккан әйләнәләр белән чикләнгән боҗра мәйданына тигез икәнен исбатлагыз.

2) Архимед (безнең эраның III гасырында) алдагы мәсьәләдә күрсәтелгәнчә төзелгән ярымшарның күләме цилиндр һәм конус күләмнәренең аермасына тигез икәнен исбатлаган (85 нче рәсем). Исәпләүләр юлы белән бу теореманың дөреслеген тикшерегез.

21. Гюльден (XVIII гасыр) яссы фигураны аны кисмәүче һәм үзе белән бер яссылыкта яткан күчәр тирәсендә әйләндергәндә килеп чыккан җисем күләме бу фигураның мәйданын әлеге фигураның авырлык үзәге сызган әйләнә озынлыгына тапкырлаганга тигез икәнен исбатлаган. Шушы теоремадан файдаланып, r радиуслы түгәрәкне түгәрәк белән бер яссылыкта яткан һәм аның үзәгеннән l ераклыктагы күчәр тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан торның күләмен табыгыз.

КЛАССТАН ТЫШ ҺӘМ ИНДИВИДУАЛЬ ЭШЛӘР ӨЧЕН МӘСЬӘЛӘЛӘР

§ 1. КҮЧӘРЛЕ СИММЕТРИЯ. КҮЧӘРЛЕ СИММЕТРИЯЛӘРНЕҢ КОМПОЗИЦИЯСЕ

1. Бирелгән кисешүче ике турының симметрия күчәрләрен төзегез[1].

2. p турысы һәм кисешүче a, b турылары бирелгән. a һәм b турылары өстендә тиңдәшле рәвештә p турысына карата симметрияле A һәм B нокталары төзегез.

3. p турысы һәм бу туры өстендә ятмаган A, B нокталары бирелгән. $A \in a$, $B \in b$ булырлык итеп, p га карата симметрияле a һәм b турылары төзегез.

4. Бер почмагы, янәшә ятучы ягы һәм калган ике ягының аермасы буенча өчпочмак төзегез.

5. Ике почмагының аермасы һәм бу почмакларга каршы яткан якларының озынлыклары буенча өчпочмак төзегез.

6. Концентрик ике әйләнә бирелгән. 1) Ике түбәсе бер әйләнә өстендә, калган ике түбәсе икенче әйләнә өстендә ятарлык итеп; 2) өч түбәсе бер әйләнә өстендә, бер түбәсе икенче әйләнә өстендә ятарлык итеп, квадрат булмаган ромб төзегез.

7. Кабарынкы бишпочмакның ике симметрия күчәре булса, ул вакытта аның биш симметрия күчәре булуын исбатлагыз.

8. Алтыпочмакның өч симметрия күчәре бар. Моннан алтыпочмакның төзек икәнлеге килеп чыгамы?

Ике очракны тикшерегез: 1) симметрия күчәрләре капма-каршы якларының урталары аша үтә; 2) симметрия күчәрләре капма-каршы түбәләре аша үтә.

9. Күчәрләре уртак ноктага ия (параллель) булган өч симметриянең композициясе күчәре шушы нокта аша (бирелгән күчәрләргә параллель) үтүче симметрия икәнен исбатлагыз.

10. Күчәрләре өчпочмакны билгели торган өч симметриянең композициясе күчәрле симметрия түгеллеген исбатлагыз.

11. ABC өчпочмагында l_A, l_B, l_C турыларында ятучы өч биссектриса үткәрелгән. $s_{l_C} \circ s_{l_B} \circ s_{l_A}$ композициясе күчәре өчпочмакка камаулы әйләнәнең үзәге аша AC ягына перпендикуляр үтүче симметрия икәнен исбатлагыз.

---

[1] Төзүгә бирелгән барлык мәсьәләләрдә дә, мәсьәләнең шартында башка инструментлар кирәклеге әйтелмәгәндә, циркуль һәм линейкадан файдалану күздә тотыла.

12. ABC өчпочмагында BC, CA һәм AB якларына m, n, p урта перпендикулярлары үткәрелгән. Өч күчәр симметриясенең композициясе $S_p \circ S_n \circ S_m$ — күчәре OB булган симметрия икәнен исбатлагыз, монда O — әлеге өчпочмакны камаучы әйләнә үзәге.

13. Тигезьяклы ABC өчпочмагы бирелгән. $(BC) = p$, $(CA) = q$, $(AB) = r$ булсын. $S_r \circ S_q \circ S_p$ композициясе ABC өчпочмагының (AC) га параллель урта сызыгын үз эченә алган турыны үзенә чагылдырганлыгын исбатлагыз.

14. ABC өчпочмагы бирелгән. A_1, B_1, C_1 нокталары — аның биеклекләренең нигезләре. (BC), (CA) һәм (AB) күчәрле симметрияләренең композициясе A_1C_1 турысын үзенә чагылдырылганлыгын исбатлагыз.

15. Якларының бирелгән урта перпендикулярлары p, q, r буенча ABC өчпочмагын төзегез.

16. Бирелгән әйләнәгә якларын бирелгән өч турыга параллель итеп өчпочмак камагыз.

17. ABC өчпочмагы биеклекләренең кисешү ноктасы аша үткәрелгән туры (BC), (CA), (AB) күчәрле симметрияләрдә бер ноктада кисешүче өч турыга чагылдырылганын исбатлагыз.

18. Ярымтүгәрәкнең AB диаметрында P ноктасы, ә аның ярымәйләнәсе өстендә $\widehat{MPA} = \widehat{M_1PB}$, $\widehat{NPA} = \widehat{N_1PB}$ булырлык итеп M, M_1 һәм N, N_1 нокталары бирелгән. MN_1 һәм M_1N хордаларының кисешү ноктасы Q ның AB диаметрына P ноктасы аша үткәрелгән перпендикуляр өстендә ятуын исбатлагыз.

19. ABC өчпочмагын камаучы әйләнә үткәрелгән. Бу әйләнә C почмагының l_C биссектрисасын M ноктасында кисеп үтә. Өчпочмакның ортоүзәге H тан $D \in l_C$ булырлык итеп биссектрисага HD перпендикуляры үткәрелгән. $|CD| : |CM| = |\cos \hat{C}|$ икәнен исбатлагыз.

20. $ABCD$ дүртпочмагы бирелгән. Әгәр $\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{C} = \hat{D}$ булса, дүртпочмакның симметрия күчәре барлыгын исбатлагыз.

21. O үзәкле әйләнәгә $ABCD$ дүртпочмагы камалган. OM, ON, OP, OQ нурлары төзелгән, монда M, N, P, Q нокталары — AB, BC, CD, DA хордаларының урталары.

$\widehat{MON} + \widehat{POQ} = 180°$, яки $\widehat{MON} = \widehat{POQ}$ икәнен исбатлагыз.

22. O үзәкле әйләнәне камаучы $ABCD$ дүртпочмагы төзелгән. $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180°$ икәнен исбатлагыз.

23*. ABC өчпочмагы яссылыгында (AB), (BC), (CA) турылары өстендә ятмаган P ноктасы бирелгән. PA, PB, PC турылары өчпочмакның тиңдәшле почмакларының биссектрисаларын эченә алган күчәрләргә карата симметрик итеп чагылдырылалар. Килеп чыккан турыларның я бер ноктада кисешкәнен, я параллель икәнен исбатлагыз.

24*. ABC өчпочмагы бирелгән. Алты күчәр симметриясе: S_a, S_b, S_c, S_a, S_b, S_c ның композициясе, бердәй үзгәртүдән аермалы буларак, параллель күчерү икәнен исбатлагыз, монда $a = (BC)$, $b = (CA)$, $c = (AB)$.

25. Бирелгән әйләнәгә, якларын бирелгән биш турыга параллель итеп, бишпочмак камагыз.

26. Турыпочмаклык формасындагы биллиард өстәлендә шар ята. Шар, барлык бортлардан да кайтарылып, үзенең башлангыч торышы аша үтсен өчен, шарга нинди юнәлештә бәрергә кирәк?

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬ КҮЧЕРҮ ҺӘМ ҮЗӘКЛЕ СИММЕТРИЯ. БОРУ

1. Кисешүче a һәм b турылары бирелгән. $A = a \cap c$, $B = b \cap c$ булган AB кисемтәсен бирелгән озынлыкта итеп, бирелгән өченче d кисемтәсенә параллель c кисемтәсе төзегез.

2. Төрле дүрт нокта: A, B, C һәм D бирелгән. Бу нокталар аша, (a, b) чикле полоса киңлеге (c, d) чикле полоса киңлегенә тигез булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә a, b, c һәм d параллель турыларын үткәрегез.

3. Диагональләре, алар арасындагы почмагы һәм бер ягы буенча трапеция төзегез.

4. Трапеция нигезләренең урталары аша үтүче туры аның ян якларын эченә алган турылар белән конгруэнт почмаклар төзесә, трапеция тигезьянлы була. Шуны исбатлагыз.

5. Ике конгруэнт әйләнә тышкы яктан K ноктасында орыналар. Үзәкләр сызыгына параллель кисүче әйләнәләрне эзлекле рәвештә A, B, C, D нокталарында кисеп үтә. AKC почмагының зурлыгы кисүчене ничек алуга бәйле түгеллеген исбатлагыз.

6. Барлык яклары да билгеле булган трапециянең мәйданын табыгыз.

7. O үзәкле әйләнәдә A, B һәм C нокталары $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 60°$ булырлык итеп бирелгән. B ноктасыннан әйләнәнең ирекле рәвештә алынган диаметрына кадәр ераклык A һәм C нокталарыннан шул диаметрга кадәр ераклыклар суммасына я ераклыклар аермасының абсолют кыйммәтенә тигез икәнен исбатлагыз.

8. ω[1] әйләнәсеннән читтә яткан M ноктасы аша ω ны, $|AB| = |BM|$ булырлык итеп, A һәм B нокталарында кисеп үтүче m турысы үткәрегез.

9. Бишпочмак (җидепочмак) якларының урталары бирелгән. Шул бишпочмакны (җидепочмакны) төзегез.

10. Дүрт конгруэнт әйләнә: ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 M ноктасы аша үтеп, икенче мәртәбә алты ноктада кисешәләр:

$$A_{12} = \omega_1 \cap \omega_2,\ A_{23} = \omega_2 \cap \omega_3,\ \dots,\ A_{43} = \omega_4 \cap \omega.$$

$A_{12}A_{43}$, $A_{23}A_{14}$, $A_{13}A_{24}$ кисемтәләренең уртак урталары барлыгын исбатлагыз.

---

[1] Кайвакыт әйләнәне ω хәрефе белән тамгаларбыз.

11. $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $|OM| \neq |ON|$ икәнлеге билгеле булганда, үзәге O һәм M, N нокталары буенча $ABCD$ квадратын төзегез.

12. Бер түбәсе бирелгән O ноктасы белән тәңгәл килерлек, ә калган икесе бирелгән ике әйләнә өстендә ятарлык итеп, тигезьяклы өчпочмак төзегез.

13. Түгәрәк эчендә бирелгән нокта аша, бирелгән озынлыкта итеп, хорда үткәрегез.

14. Тигезьяклы ABC өчпочмагының BC, CA һәм AB яклары өстендә тиңдәшле рәвештә M, N һәм P нокталары бирелгән.

$$|BM|:|MC| = |CN|:|NA| = |AP|:|PB| = k$$

икәне билгеле.

1) MNP ның тигезьяклы өчпочмак икәнен исбатлагыз.

2) $|BC| = a$, $k = 2$ булса, $|MN|$ ны исәпләп чыгарыгыз.

15. $ABCD$ квадратының BC, CD, DA һәм AB яклары өстендә тиңдәшле рәвештә P, Q, R һәм S нокталары бирелгән. $|BP|:|PC| = |CQ|:|QD| = |DR|:|RA| = |AS|:|SB| = k$ икәне билгеле.

1) $PQRS$ ның квадрат икәнен исбатлагыз.

2) $|AB| = a$, $k = 3$ булса, $|PQ|$ ны исәпләп чыгарыгыз.

16. Тигезьяклы ABC өчпочмагы һәм аның үзәге O бирелгән. O үзәге тирәсендә α почмагына борганда, ABC өчпочмагы $A_1B_1C_1$ өчпочмагына чагыла.

1) $(AB) \cap (A_1B_1) = C_2$, $(BC) \cap (B_1C_1) = A_2$ һәм $(CA) \cap (C_1A_1) = B_2$ нокталары тигезьяклы өчпочмак түбәләре икәнен исбатлагыз.

2) $|AB| = m$ булса, $|A_2B_2|$ не исәпләп чыгарыгыз.

17. M ноктасында кисешүче ике туры өстендә бер үк озынлыктагы AB һәм A_1B_1 кисемтәләре бирелгән. AA_1M һәм BB_1M әйләнәләренең A ны A_1 гә, B ны B_1 гә чагылдыра торган бору үзәгендә кисешкәнлеген исбатлагыз.

18. Үзәкле симметрия булмаган боруда һәр турыга шушы борудагы тиңдәшле нокталарның бер генә пары туры килгәнлеген исбатлагыз.

Үзәкле симметрия очрагында эшнең ничек торганын ачыклагыз.

19. Бирелгән боруда XX' турылары: 1) бирелгән S ноктасы аша үтәрлек итеп, 2) бирелгән l турысына параллель булырлык итеп, X' нокталарына чагылдырыла торган X нокталары күплеге M ны табыгыз.

20. Бердәй ориентирланган[1] тигезьяклы конгруэнт ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары бирелгән. Тиңдәшле рәвештә A, B, C ны—

---

[1] AB нурын AC нурына чагылдыра торган бору белән A_1B_1 нурын A_1C_1 нурына чагылдыра торган бору бердәй юнәлгән: икесе дә сәгать йөреше уңаена яки сәгать йөрешенә каршы юнәлгән булсалар, ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары бердәй ориентирланган дип атала. Шулай булмаганда, өчпочмакларны капма-каршы ориентирланган диләр.

Теләсә нинди ике күппочмакның бердәй һәм капма-каршы ориентациясе турында төшенчә шушына аналогик рәвештә бирелә.

A_1, B_1, C_1 гә; A, B, C ны—B_1, C_1, A_1 гә, A, B, C ны C_1, A_1, B_1 гә чагылдыра торган өч боруның үзәкләре бер туры өстендә ятканын исбатлагыз.

21. $A \neq B$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, $0° \leqslant \beta \leqslant 360°$ булганда, R_A^{α} һәм R_B^{β} боруларының композициясе ул $R_{\hat{C}}^{\alpha+\beta}$ боруы (яки $\alpha + \beta \neq 360°$ булса, $R_{\hat{C}}^{(\alpha+\beta-360°)}$ боруы, яки $\alpha + \beta = 360°$ булса, күчерү) икәнен исбатлагыз.

22. ABC өчпочмагының AB һәм BC якларын нигез итеп алып, бердәй ориентирланган $ABMN$ һәм $BCQP$ квадратлары төзелгән. Аларның үзәкләрен—O_1 һәм O_2 дип, AC ягының уртасын—K, MP кисемтәсенең уртасын L дип тамгалыйк. O_1LO_2K дүртпочмагының квадрат икәнен исбатлагыз.

23. ABC өчпочмагының AC һәм BC яклары өстендә, аның тышында, тигезьяклы ACB_1 һәм BCA_1 өчпочмаклары төзелгән. M—AB ягының уртасы, O—ACB_1 өчпочмагының үзәге булса, MA_1O өчпочмагының почмакларын табыгыз.

24. Диагональләре үзара перпендикуляр һәм конгруэнт булган $ABCD$ дүртпочмагы бирелгән. M ноктасы—A ны B га һәм C ны D га чагылдыра торган бору үзәге, ә N ноктасы A ны D га һәм C ны B га чагылдыра торган бору үзәге булсын.

MN кисемтәсенең уртасы ул $ABCD$ дүртпочмагы урта сызыкларының кисешү ноктасы икәнен исбатлагыз.

25*. $ABCD$ трапециясенең ян яклары BC һәм AD үзләренең урталары тирәсендә $+90°$ ка борылган, шуннан соң алар B_1C_1 һәм A_1D_1 торышларын алган.

1) $|D_1C_1| = |A_1B_1|$ икәнен исбатлагыз.

2) C_1D_1 кисемтәсенең озынлыгын трапеция нигезләренең озынлыклары аша күрсәтегез.

§ 3. ВЕКТОРЛАР

1. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының медианалары уртак ноктада кисешәләр. $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{B_1A}$ икәнен исбатлагыз.

2. $ABCD$ дүртпочмагы һәм M, N ($M \in [AB]$, $N \in [CD]$) нокталары бирелгән. $\overrightarrow{Y_1Y_2}$ векторының M һәм N нокталарын ничек алуга бәйле түгеллеген исбатлагыз, монда Y_1 һәм Y_2 $AMND$ һәм $CBMN$ дүртпочмаклары урта сызыкларының кисешү нокталары.

3. $ABCD$ дүртпочмагы һәм M ноктасы бирелгән. Дүртпочмак якларының урталарына карата, M ноктасына симметрияле итеп, M_1, M_2, M_3, M_4 нокталары төзелгән. $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_4}$ икәнен исбатлагыз.

4. $ABCD$ дүртпочмагы бирелгән. BCD, CDA, DAB, ABC өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары—түбәләре булган икенче бер дүртпочмак төзелгән. Ике дүртпочмакның да урта сызыклары бер ноктада кисешкәнен исбатлагыз.

5. ABC өчпочмагының BC, CA һәм AB яклары өстендә тиңдәшле рәвештә A_1 һәм A_2, B_1 һәм B_2, C_1 һәм C_2 нокталары бирелгән, өстәвенә, $|BA_1| = |A_2C|$, $|CB_1| = |B_2A|$, $|AC_1| = |C_2B|$. $A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары бирелгән өчпочмак медианаларының кисешү ноктасына карата симметрияле икәнен исбатлагыз.

6. ABC өчпочмагының A, B һәм C түбәләре аша, $\vec{S}$ векторы юнәлешенә параллель итеп, (BC), (CA) һәм (AB) ны тиңдәшле рәвештә A_1, B_1, C_1 нокталарында кисеп үтүче турылар үткәрелгән. $\vec{S} = \alpha\overrightarrow{CC_1} = \beta\overrightarrow{BB_1} = \gamma\overrightarrow{AA_1}$ булса, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ икәнен исбатлагыз.

7. ABC өчпочмагының BC, CA һәм AB яклары өстендә, $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{CA}$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә A_1, B_1 һәм C_1 нокталары бирелгән. $A_1B_1C_1$ өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы бирелгән өчпочмак медианаларының кисешү ноктасы белән тәңгәл килгәнлеген исбатлагыз.

8. $ABCD$ дүртпочмагының AB һәм CD яклары өстендә, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$ булырлык итек, тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталары бирелгән. BC, MN һәм AD кисемтәләренең урталары бер туры өстендә ятканын исбатлагыз.

9. ABC өчпочмагын төзүче BC, CA һәм AB турылары өстендә, $\overrightarrow{AC_1} = \alpha\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = \beta\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = \gamma\overrightarrow{B_1A}$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә A_1, B_1 һәм C_1 нокталары бирелгән. A_1, B_1, C_1 нокталары бер туры өстендә ятсалар, $\alpha\beta\gamma = -1$ икәнен исбатлагыз. Кире җөмләнең дөреслеген тикшерегез.

10. $ABCD$ параллелограммы бирелгән. AB турысы өстендә, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ булырлык итеп, M ноктасы алынган. DM турысы (AC) ны, $\overrightarrow{AN} = l\overrightarrow{AC}$ булырлык итеп, N ноктасында кисеп үтә. l ны исәпләп чыгарыгыз.

11. $ABCD$ параллелограммының C түбәсе аша AB һәм AD турыларын тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталарында кисеп үтүче l турысы үткәрелгән. $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC} = l\overrightarrow{AN}$ булса, $k + l = 1$ икәнен исбатлагыз.

12. ABC өчпочмагында CC_1 медианасы үткәрелгән. CC_1 турысына параллель g турысы (AB), (BC) һәм (CA) турыларын тиңдәшле рәвештә C_0, A_0, B_0 нокталарында кисеп үтә. $\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}$ суммасы g турысын ничек сайлап алуга бәйле түгеллеген исбатлагыз.

13. Яссылыкта шундый дүрт туры бирелгән: бу турыларның һәр өчесе бер нокта аша үтми, һәр икесе үзара параллель түгелләр. Әгәр дүрт турының берсе калган өч туры белән билгеләнгән өчпочмакның медианасына параллель булса, калган өч турының һәркайсы аналогик үзлеккә ия икәнен исбатлагыз.

14. ABC өчпочмагының A, B һәм C түбәләре аша, S ноктасында кисешерлек итеп, тиңдәшле рәвештә l, m һәм n турылары үткәрелгән. BC, CA һәм AB якларының урталары: A_0, B_0 һәм C_0 нокталары аша тиңдәшле рәвештә l, m һәм n га параллель итеп үткәрелгән l_1, m_1 һәм n_1 турыларының шулай ук бер ноктада кисешкәнен исбатлагыз.

15. ABC өчпочмагы һәм M ноктасы бирелгән; A_1, B_1 һәм C_1 нокталары — BC, CA һәм AB якларының урталары. A, B һәм C түбәләре аша тиңдәшле рәвештә MA_1, MB_1 һәм MC_1 турыларына параллель турылар үткәрелгән. Бу турыларның бер ноктада кисешкәнлеген исбатлагыз.

16. ABC өчпочмагында CC_1 медианасы үткәрелгән. p турысы AC, BC һәм CC_1 кисемтәләрен тиңдәшле рәвештә P, Q һәм M нокталарында кисеп үтә. $\frac{1}{2}\left(\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PC}|}+\frac{|\overrightarrow{BQ}|}{|\overrightarrow{QC}|}\right)=\frac{|\overrightarrow{C_1M}|}{|\overrightarrow{MC}|}$ икәнен исбатлагыз.

17. O үзәкле әйләнәгә $ABCD$ дүртпочмагы камалган, аның диагональләре үзара перпендикуляр һәм M ноктасында кисешәләр. $\overrightarrow{OM}$ векторын $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ һәм $\overrightarrow{OD}$ векторлары аша күрсәтегез.

18. O үзәкле төзек $A_1A_2...A_n$ n-почмагы бирелгән. $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$ икәнен исбатлагыз.

19. O үзәкле төзек $A_1A_2...A_n$ n-почмагы һәм M ноктасы бирелгән. $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MA_i}=n\cdot\overrightarrow{MO}$ икәнен исбатлагыз.

20. O_1 һәм O_2 үзәкләре булган, ирекле рәвештә урнашкан төзек n-почмаклар: $A_1A_2...A_n$ һәм $B_1B_2...B_n$ бирелгән. $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iB_i}=n\overrightarrow{O_1O_2}$ икәнен исбатлагыз.

21*. O үзәкле төзек бишпочмак $A_1A_2A_3A_4A_5$ бирелгән. $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ һәм $\overrightarrow{OA_5}$ векторларын $\overrightarrow{OA_1}$ һәм $\overrightarrow{OA_2}$ векторлары аша күрсәтегез.

22. $ABCD$ дүртпочмагының урта сызыгы MN ның озынлыгы AB һәм CD яклары озынлыгының ярымсуммасына тигез булса ($M\in[BC]$, $N\in[DA]$), ул вакытта $ABCD$ ның трапеция яки параллелограмм булганын исбатлагыз.

23. $OABC$ һәм $OA_1B_1C_1$ параллелограммнары бирелгән. Өч кисемтә: AA_1, BB_1, CC_1 нең һәркайсы калган ике кисемтәнең суммасыннан зур түгеллеген исбатлагыз.

24*. ABC өчпочмагының яклары өстендә, аның тышында, тигезьяклы ABC_1, BCA_1, CAB_1 өчпочмаклары төзелгән. $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ икәнен исбатлагыз.

25*. ABC өчпочмагының яклары өстендә, аның тышында, үзәкләре тиңдәшле рәвештә A_1, B_1 һәм C_1 нокталарында булган квадратлар төзелгән. $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ икәнен исбатлагыз.

26*. ABC өчпочмагының яклары өстендә, аның тышында, төзек ABC_1, BCA_1, CAB_1 өчпочмаклары төзелгән. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары тәңгәл килгәнлеген исбатлагыз.

27*. ABC өчпочмагының AA_1 һәм BB_1 биеклекләре дәвамында, A һәм B түбәләреннән башлап, AA_2 һәм BB_2 кисемтәләре салынган, анда $|AA_2|=|BC|$ һәм $|BB_2|=|AC|$. $|CA_2|=|CB_2|$, $[CA_2]\perp[CB_2]$ икәнен исбатлагыз.

28*. ABC өчпочмагының CA һәм CB яклары өстендә, аның тышында, CAA_1C_1 һәм CBB_1C_1' квадратлары төзелгән. CC_1C_1' өчпочмагының C түбәсеннән үткәрелгән медианасы AB ягына перпендикуляр һәм аның яртысына тигез икәнен исбатлагыз.

29*. $ABCD$ дүртпочмагының яклары өстендә, аның тышында, үзәкләре тиңдәшле рәвештә P, Q, R, S нокталарында булган ABB_1A_1, BCC_1B_1', CDD_1C_1' һәм DAA_1D_1' квадратлары төзелгән. PR һәм QS кисемтәләренең тигез һәм үзара перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

30*. ABC өчпочмагы һәм аңа камаулы әйләнәнең үзәге O бирелгән. $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ икәнен исбатлагыз, монда $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$.

§ 4. ГОМОТЕТИЯ

1. Чикләре параллель булган һәм конгруэнт булмаган (a, b) һәм (a_1, b_1) полосалары бирелгән. Беренче полосаны икенчесенә чагылдыручы барлык гомотетияләр күплеген табыгыз.

2. Ике гомотетиянең композициясе я гомотетия, я күчү, я бердәй үзгәртү икәнен исбатлагыз.

3. Нинди шарт үтәлгәндә, төрле ике гомотетиянең тиңдәшле уртак пар нокталары була? Әгәр андый нокталар булса, шул нокталар парын төзегез.

4. Теләсә нинди үзәкле һәм теләсә нинди коэффициентлы гомотетия әйләнәне әйләнәгә чагылдырганлыгын исбатлагыз.

5. Ике әйләнәнең уртак ноктасы әйләнәләрнең берсен икенчесенә чагылдыра торган гомотетия үзәге булып хезмәт итсә, ул нокта әйләнәләрнең орыну ноктасы икәнлеген исбатлагыз.

6. ω_1 һәм ω_2 әйләнәләре A һәм B нокталарында кисешәләр. A ноктасы аша шундый p турысы үткәрегез: p турысыннан әйләнәләр белән киселеп алынган M_1A һәм M_2A хордаларының чагыштырмасы k санына тигез $(|M_1A|:|M_2A|=k)$ булсын.

7. Ачык түгәрәкнең M ноктасы аша, бу нокта белән бирелгән чагыштырмада бүленерлек итеп, AB хордасы үткәрегез.

8. Конгруэнт булмаган ике әйләнәнең берсен ике гомотетия ярдәмендә икенчесенә чагылдырырга мөмкин икәнен исбатлагыз.

9. l турысы өстендә ике пар нокта: A, B һәм A_1, B_1 бирелгән, өстәвенә, $|AB| \neq A_1B_1$. A ны A_1 гә һәм B ны B_1 гә чагылдыра торган гомотетия үзәген төзегез.

10. Почмак һәм шул почмакныкы булган нокта бирелгән. Почмакның якларына орындырып, бирелгән нокта аша үтүче әйләнә төзегез.

11. Почмак һәм аның эчке ноктасы M бирелгән. M ноктасы аша, почмакның якларын A һәм B нокталарында кисеп үтүче һәм AB кисемтәсе M ноктасында бирелгән чагыштырмада бүленерлек итеп, туры үткәрегез.

12*. ABC өчпочмагына әйләнә камалган. Ул әйләнә AB турысына M ноктасында орына. M_1—камаулы әйләнәнең M ноктасына диаметраль капма-каршы нокта булсын. CM_1 турысы AB турысын $|AC|+|AC_1|=|BC|+|BC_1|$ булырлык C_1 ноктасында кисеп үткәнлеген исбатлагыз.

13. Төрле радиуслы ω_1 һәм ω_2 әйләнәләре M ноктасында орыналар. Ирекле рәвештә үзара перпендикуляр MA_1, $A_1 \in \omega_1$ һәм MA_2, $A_2 \in \omega_2$ хордалары төзелгән. A_1A_2 турылары күплегенең үзәк турылар бәйләменә кергәнлеген исбатлагыз.

14. Тышкы яктан пар-пар орынган өч әйләнә бирелгән. Линейкадан гына файдаланып, бу әйләнәләрнең үзәкләрен төзегез (әйләнәләрнең орыну нокталары бирелгән).

15. Бирелгән сегмент эченә, ике түбәсе—сегмент дугасында, калган икесе—нигезендә ятарлык итеп, квадрат камагыз.

16. ABC өчпочмагы бирелгән. Ике түбәсе—AB турысында, калган икесе тиндәшле рәвештә AC һәм BC турыларында ятарлык итеп, квадрат төзегез.

17. Бирелгән сектор эченә, ике түбәсе дуга өстендә, калган икесе—радиуслары өстендә ятарлык итеп, квадрат камагыз.

18. Бирелгән сектор эченә, бер түбәсе—дуга өстендә, икенче түбәсе—радиус өстендә, калган ике түбәсе икенче радиус өстендә ятарлык итеп, квадрат камагыз.

19. Әйләнәдә ике радиус үткәрелгән. Шушы радиуслар белән өч конгруэнт кисемтәгә бүленерлек итеп, әйләнәгә хорда үткәрегез.

20*. Тигезьяклы өчпочмакның BC, CA, AB яклары A, B, C нокталары белән бер үк k чагыштырмасында бүленгән:

$$\frac{|\overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{|\overrightarrow{CA_1}|}{|\overrightarrow{A_1B}|}=\frac{|\overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{C_1A}|}=k.$$

$A_1B_1C_1$ өчпочмагының B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 яклары A_2, B_2, C_2 нокталары белән бер үк $\frac{1}{k}$ чагыштырмасында бүленгән:

$$\frac{|\overrightarrow{A_1B_2}|}{|\overrightarrow{B_2C_1}|}=\frac{|\overrightarrow{C_1A_2}|}{|\overrightarrow{A_2B_1}|}=\frac{|\overrightarrow{B_1C_2}|}{|\overrightarrow{C_2A_1}|}=\frac{1}{k}.$$

$A_2B_2C_2$ өчпочмагының ABC өчпочмагына гомотетик икәнен исбатлагыз. Гомотетия коэффициентын исәпләп чыгарыгыз.

§ 5. ОХШАШЛЫК

1. Төрле A һәм B нокталары һәм төрле A_1 һәм B_1 нокталары бирелгән. A ны A_1 гә һәм B ны B_1 гә чагылдыручы ике һәм бары тик ике генә охшашлык барлыгын исбатлагыз.

2. Нокталар пары (A, A_1) һәм (B, B_1) бирелгән, өстәвенә, $|AB| \neq |A_1B_1|$. A ны A_1 гә, B ны B_1 гә чагылдыра торган ике охшашлыкның кузгалмас[1] нокталарын төзегез.

3. Бер үк d киңлегендәге өч полоса: (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1) бирелгән. a, b, c турылары—ABC өчпочмагын, ә a_1, b_1, c_1 турылары беренче өчпочмак эченә урнашкан $A_1B_1C_1$ өчпочмагын төзиләр.

Беренче өчпочмакның мәйданы S, периметры $2p$ билгеле булганда, икенче өчпочмакның мәйданы S_1 не һәм периметры $2p_1$ не исәпләп чыгарыгыз.

4. $ABCD$ дүртпочмагы бирелгән. Якларын һәм диагональләрен $ABCD$ дүртпочмагының якларына һәм диагональләренә параллель итеп, икенче $PQRS$ дүртпочмагы төзегез.

5. Әгәр ABG өчпочмагы (G—ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы) якларының озынлыклары бирелгән өчпочмакның медианалары озынлыгындагы өчпочмакка охшаш булса, ABC өчпочмагында a, b, c якларының озынлыклары арасындагы бәйләнешне табыгыз.

6. P ноктасы аша Q ноктасында кисешүче ике турыга PA һәм PB перпендикулярлары үткәрелгән. H ноктасы QAB өчпочмагының ортоүзәге булсын. P ны H ка чагылдыруның охшашлык икәнен исбатлагыз һәм охшашлык коэффициентын табыгыз (турылар арасындагы φ почмагы—туры почмак түгел).

7. $ABCD$ дүртпочмагы бирелгән. A_1 һәм C_1 нокталары—A һәм C түбәләренең BD диагоналенә ортогональ проекцияләре, ә B_1 һәм D_1 нокталары—B һәм D ның AC диагоналенә ортогональ проекцияләре. $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмагының бирелгән дүртпочмакка охшаш икәнен исбатлагыз һәм охшашлык коэффициентын исәпләп чыгарыгыз. (AC һәм BD диагональләре үзара перпендикуляр түгелләр.)

8. O үзәкле әйләнәгә ABC өчпочмагы камалган. O үзәге тирәсендә $180°$ ка тигез булмаган α почмагына бору ABC өчпочмагын $A_1B_1C_1$ өчпочмагына чагылдыра: $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$. Бу борудагы тиңдәшле BC һәм B_1C_1, CA һәм C_1A_1, AB һәм A_1B_1 турылары A_0, B_0, C_0 нокталарында кисешәләр. $A_0B_0C_0$ өчпочмагының ABC өчпочмагына охшаш икәнен исбатлагыз. Охшашлык коэффициентын табыгыз.

9. Ягы a га тигез булган квадрат үзенең үзәге тирәсендә α почмагына борылган, өстәвенә, $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $D \to D_1$. AB һәм A_1B_1, BC һәм B_1C_1, CD һәм C_1D_1, DA һәм D_1A_1 туры-

---

[1] Охшаш фигураларны төзегәндә үзенә чагылдырыла торган нокта охшашлыкның кузгалмас ноктасы дип атала. Бу ноктаны шулай ук охшашлык үзәге дип тә атыйлар.

ларының кисешү нокталары квадрат түбәләре икәнен исбатлагыз. Аның ягын a һәм α аша күрсәтегез.

10. Үзенең үзәге тирәсендә борганда $ABCD$ квадраты $A_1B_1C_1D_1$ квадратына чагыла. AA_1, BB_1, CC_1 һәм DD_1 турылары квадратның түбәләре булган ноктaларда кисешкәнлеген исбатлагыз. Бору почмагы α га, бирелгән квадратның ягы a га тигез булганда, бу квадратның ягын (a_1 не) исәпләп чыгарыгыз.

11. Ян яклары тигез булмаган трапециянең якларына үткәрелгән урта перпендикулярлар бирелгән трапециягә охшаш трапецияне билгеләгәнлеген исбатлагыз. Охшашлык коэффициентын исәпләп чыгарыгыз.

12. ABC өчпочмагы бирелгән. BC, CA, AB турылары өстендә, $A_1B_1C_1$ өчпочмагы ABC өчпочмагына охшаш һәм аның белән бердәй ориентирланган булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә A_1, B_1 һәм C_1 ноктaларын табыгыз.

13. Охшаш һәм бердәй ориентирланган ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары бирелгән. Әгәр O—ирекле рәвештә алынган нокта һәм AA_1OA_0, BB_1OB_0, CC_1OC_0 дүртпочмаклары—параллелограммнар булса, $A_0B_0C_0$ өчпочмагы бирелгән өчпочмакларга охшаш һәм алар белән бердәй ориентирланган була. Шуны исбатлагыз.

14. Бер түбәсе бирелгән нокта белән тәңгәл килерлек, ә калган икесе: 1) бирелгән ике әйләнә өстендә ятарлык; 2) бирелгән ике туры өстендә ятарлык итеп, бирелгән өчпочмакка охшаш һәм аның белән бердәй ориентирланган өчпочмак төзегез.

15. Ике концентрик әйләнә бирелгән. A һәм B түбәләре—бер әйләнә өстендә, ә C һәм D түбәләре икенче әйләнә өстендә ятарлык итеп, $ABCD$ квадраты төзегез.

§ 6. КООРДИНАТАЛАР

1. Турыпочмаклы координаталар ярдәмендә $A(a, b)$ ноктасын $A_1(a_1, b_1)$ ноктасына чагылдыра торган параллель күчерү формуласын языгыз.

2. Турыпочмаклы ике координаталар системасының башлангычлары O_1—уртак, өстәвенә, $(\widehat{Ox, Ox'}) = \varphi$. Координаталар системасы Oxy та M ноктасының координаталары (x, y), ә $Ox'y'$ системасында—(x', y'). x һәм y буенча x' һәм y' ны исәпләргә мөмкинлек бирүче формулалар төзегез.

3. Турыпочмаклы координаталарны кулланып, координаталар башлангычы тирәсендә яссылыкны φ почмагына бору формуласын языгыз.

4. Турыпочмаклы координаталарны кулланып, $y = kx + b$ күчәренә карата яссылыкның күчәр симметриясе формуласын языгыз.

5. Бердәй озынлыктагы AB һәм A_1B_1 кисемтәләре бирелгән. Бу кисемтә очларының турыпочмаклы координаталары түбән-

дәгечә: $A(0;\ 0)$, $B(5;\ 0)$, $B_1(3;\ 4)$, $A_1(0;\ 0)$. Яссылыкны A ны A_1 гә, B ны B_1 гә чагылдыра торган бору тигезләмәләрен языгыз.

6. Гомотетия үзәге S ның координаталары x_0, y_0 гә, гомотетия коэффициенты k га тигез. Бирелгән гомотетиядә M ноктасының координаталары x, y буенча аның образы булган M' ноктасының координаталарын x' һәм y' ны исәпләргә мөмкинлек бирүче формулалар төзегез.

7. Күчәрләре бердәй юнәлешле: $Ox\uparrow\uparrow O'x'$, $Oy\uparrow\uparrow O'y'$ булган ике координаталар системасы бирелгән. Беренче координаталар системасында M ноктасынын координаталары x, y, ә икенчесендә—x', y'. Oxy системасында O' ноктасының координаталары a һәм b га тигез булса, x, y координаталары буенча x', y' ны исәпләргә мөмкинлек бирүче формулаларны табыгыз.

8. Ике гомотетиянең композициясе гомотетия яки, аерым очракта, параллель күчерү яки бердәй чагылдыру икәнен координаталар методы белән исбатлагыз.

9. $A(3;\ -1)$ ноктасы аша $y=2x-5$ турысына параллель итеп үткәрелгән туры тигезләмәсен языгыз.

10. $y=kx+b$ турысы бирелгән. Бу турының теләсә нинди ике ноктасы: $A(x_1,\ y_1)$ һәм $B(x_2,\ y_2)$, $x_1 \neq x_2$ өчен $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ тигезлеге үтәлгәнлеген исбатлагыз.

11. $A(a_1,\ a_2)$ һәм $B(b_1,\ b_2)$ нокталары бирелгән. $|MA|^2+$ $+|MB|^2=k^2$ тигезлеге үтәлә торган $M(x,\ y)$ нокталары күплеге өчен тигезләмә төзегез. Килеп чыккан тигезләмәгә геометрик аңлатма бирегез.

12. $A(a_1,\ a_2)$ һәм $B(b_1,\ b_2)$ нокталары бирелгән. $|MA|^2-$ $-|MB|^2=k^2$ тигезлеге үтәлә торган $M(x,\ y)$ нокталары күплеге өчен тигезләмә төзегез. Килеп чыккан тигезләмәгә геометрик аңлатма бирегез.

13. $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ нокталарының бер туры өстендә яту шартын языгыз.

14. Өчпочмак медианаларының бер ноктада кисешкәнен һәм өчпочмакның түбәсеннән башлап исәпләгәндә шул нокта белән 2:1 чагыштырмасында бүленгәнен координаталар ярдәмендә исбатлагыз.

15. $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ турыларының перпендикулярлык шартын языгыз.

16. AB һәм CD кисемтәләре очларының координаталары белән бирелгән: $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$, $C(c_1,\ c_2)$, $D(d_1,\ d_2)$. Бу кисемтәләрнең перпендикулярлык шартын языгыз.

17. $M(x_0,\ y_0)$ ноктасыннан $y=kx+b$ турысына кадәр ераклыкны исәпләп чыгарыгыз.

18. Квадратның барлык түбәләреннән аның үзәге аша үтүче турыга кадәр ераклыкларның квадратлары суммасы бу турыны ничек алуга бәйле түгеллеген исбатлагыз.

19. Түбәләренең бирелгән турыпочмаклы координаталары $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 4)$, $C(-2;\ 5)$ буенча ABC өчпочмагының мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

20. Түбәләренең координаталары: $A(-1;\ -2)$, $B(5;\ -2)$, $C(2;\ 3)$ буенча (сызымын сызмыйча гына) өчпочмакның төрен билгеләгез.

21. Квадратка R радиуслы әйләнә камалган. Әйләнәнең теләсә нинди ноктасыннан квадратның якларына кадәрге ераклыкларның квадратлары суммасы даими сан һәм $6R^2$ ка тигез икәнлеген исбатлагыз.

22. $ABCD$ параллелограммы һәм M ноктасы бирелгән. $|MA|^2-|MB|^2+|MC|^2-|MD|^2$ аңлатмасының зурлыгы M ноктасының торышына бәйле түгеллеген исбатлагыз.

23. Турыпочмаклык бирелгән. Яссылыкта шундый нокталар күплеген табыгыз: ул нокталарның һәркайсыннан турыпочмаклыкның бер диагоналенең очларына кадәрге ераклыкларның квадратлары суммасы аның икенче диагоналенең очларына кадәрге ераклыкларның квадратлары суммасына тигез булсын.

24. Ике әйләнә бирелгән: $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-x=0$. Бу әйләнәләрнең охшашлык үзәге координаталарын табыгыз.

25. $x^2+y^2=R^2$ әйләнәсенә $M(x_0,\ y_0)$ ноктасындагы орынма тигезләмәсен төзегез.

26. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ икәнен исбатлагыз.

27. $y=x^2$ параболасын үзәкле симметрия белән $y=-x^2+$ $+mx+n$ параболасына чагылдырырга мөмкин икәнен исбатлагыз.

28. $y=x^2$, $y=px^2+qx+r$, $p\neq1$, параболаларының гомотетик икәнен исбатлагыз.

29. Ике парабола бирелгән: $y=x^2$, $y=2x^2+x-1$. Бу параболаларның гомотетия үзәге координаталарын табыгыз.

30. $y=x^2$ параболасы өстендә дүрт нокта: A, B, C, D бирелгән. Әгәр AB һәм CD турылары Ox күчәренә бер үк почмак белән авышкан булсалар, AC һәм BD, AD һәм BC турыларының да Ox күчәренә шундый ук почмак белән авышканлыгын исбатлагыз (бирелгән нокталар белән билгеләнә торган хордалар арасында үзара параллельләре юк дип исәпләнә).

31. $y=x^2$ параболасына $M(x_0,\ x_0^2)$ ноктасындагы орынма тигезләмәсен языгыз.

32. $y=x^2$ параболасына үткәрелгән ике орынма $M(a,\ b)$ ноктасында кисешәләр. Орыну нокталары аша үтүче туры тигезләмәсен төзегез.

33. Алты нокта: A, B, C, D, E, F — парабола нокталары. AB һәм DE хордалары һәм шулай ук BC һәм EF хордалары үзара параллель булсалар, CD һәм FA хордаларының да үзара параллель икәнен исбатлагыз.

Бу нәтиҗәнең $xy=p$ гиперболасы өчен дөреслеген тикшерегез.

34. $xy=1$ гиперболасы өстендә өч нокта бирелгән: $A\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right)$, $B\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right)$, $C\left(x_3, \frac{1}{x_3}\right)$. ABC өчпочмагы биеклекләренең кисешү ноктасы H гипербола ноктасы да икәнен исбатлагыз.

35. ABC өчпочмагының A, B һәм C түбәләре аша өч пар туры: a_1 һәм a_2, b_1 һәм b_2, c_1 һәм c_2 үткәрелгән, өстәвенә, $a_1 \| b_1 \| c_1$, $a_2 \| b_2 \| c_2$. Барлыкка килгән BC, CA һәм AB диагональле параллелограммнарның икенче диагональләрен эченә алган турыларның бер генә уртак ноктасы бар яки алар параллельләр. Шуны исбатлагыз.

§ 7. КООРДИНАТАЛЫ ВЕКТОР МЕТОДЫ

1. $\vec{a}$ векторының координаталары $(5; -4)$. 1) $2\vec{a}$; 2) $-\vec{a}$; 3) $-4\vec{a}$; 4) $\frac{1}{5}\vec{a}$ векторларының координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

2. $A(x_1, y_1)$ һәм $B(x_2, y_2)$ нокталары бирелгән. $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табыгыз.

3. 1) $A(1; 3)$, $B(2; 5)$; 2) $A(2; -1)$, $B(0; 4)$; 3) $A(1; -1)$, $B(-1; 1)$ булганда, AB кисемтәсенең уртасы—M ноктасының координаталарын табыгыз.

4. 1) $A(-1; 3)$, $B(2; 1)$; 2) $A(2; -3)$, $B(0; 2)$ булганда, AB кисемтәсен $1:2$ чагыштырмасында бүлүче C ноктасының координаталарын табыгыз.

5. $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары үзләренең координаталары белән бирелгән: $\overrightarrow{AB}(2; -1)$, $\overrightarrow{CD}(3; 1)$. 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$ векторларының координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

6. $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары үзләренең координаталары белән бирелгән: $\overrightarrow{AB}(3; 4)$, $\overrightarrow{CD}(-2; 1)$. 1) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$; 3) $-\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{DC}$; 4) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}$ векторларының координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

7. $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары үзләренең координаталары белән бирелгән: $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(-1; -1)$, $\vec{c}(0; 2)$. 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$; 4) $3\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}$ векторларының координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

8. Өч нокта бирелгән: $A(2; 1)$, $B(3; -2)$, $C(0; k)$. k ның кыйммәте нинди булганда, бирелгән нокталар бер туры өстендә яталар?

9. ABC өчпочмагы бирелгән: $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 4)$. M, N, P нокталары—BC, CA һәм AB якларының урталары. $\overrightarrow{MN}$,

$\vec{NP}$, $\vec{PM}$ векторларының координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

10. ABC өчпочмагы түбәләренең координаталары бирелгән: $A(2; 3)$, $B(-1; 4)$, $C(1; 1)$. 1) $ABCD$; 2) $ACBD$; 3) $CABD$ параллелограммнарында D түбәсенең координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

11. ABC өчпочмагы бирелгән: $A(0; -1)$, $B(3; 1)$; $C(1; -2)$; $[AA_1]$, $[BB_1]$ һәм $[CC_1]$ — аның медианалары. $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$ һәм $\vec{CC_1}$ векторларының координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

12. $A(1; 3)$, $B(2; -1)$, $C(0; 4)$, $D(2; -4)$ булган AB һәм CD кисемтәләренең параллель икәнен исбатлагыз.

13. $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(2; -1)$, $D(0; -4)$ булган $\vec{AB}$ һәм $\vec{CD}$ векторларының капма-каршы юнәлешле икәнен исбатлагыз.

14. $A(1; 0)$, $B(3; 4)$, $C(2; -1)$, $D(2; 5)$ булганда, A, B, C һәм D нокталарының параллелограмм түбәләре икәненә ышаныгыз. Бу параллелограммны әйтеп бирегез.

15. Дүрт нокта бирелгән: $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 0)$, $D(8; -3)$. Бу нокталарның трапеция түбәләре икәненә ышаныгыз. Ул трапецияне атагыз.

16. Нуль-вектор булмаган ике вектор бирелгән: $\vec{a}(m; n)$, $\vec{b}(p; q)$. Бу векторларның коллинеар булуы өчен кирәкле һәм җитәрлек шартны языгыз.

17. A ноктасы аша $\vec{p}$ векторына параллель үтүче туры тигезләмәсен төзегез: 1) $A(2; -1)$, $\vec{p}(4; 1)$; 2) $A(1; 1)$, $\vec{p}(-1; 3)$, 3) $A(3; 2)$, $\vec{p}(2; 0)$.

18. Туры үзенең гомуми тигезләмәсе белән бирелгән: $Ax + By + C = 0$. Турының $\vec{p}(-B; A)$ векторына параллель икәнен исбатлагыз.

19. m ның кыйммәте нинди булганда, $2x + my - 1 = 0$, $mx + 8y + 2 = 0$ турылары параллель була?

20. Нуль-вектор булмаган ике вектор үзенең координаталары белән бирелгән: $\vec{a}(m, n)$, $\vec{b}(p, q)$. $mp + nq = 0$ тигезлеге $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының перпендикуляр булуы өчен җитәрлек һәм кирәкле шарт икәнен исбатлагыз.

21. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бирелгән, өстәвенә $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = +90°$. $\vec{a}$ векторының координаталары $(x_0; y_0)$ гә тигез. $\vec{b}$ векторының координаталары нәрсәгә тигез?

22. ABC өчпочмагы үз түбәсенең координаталары белән бирелгән: $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(-1; 4)$. Координаталар башлангычы тирәсендә $+90°$ ка борганда, бирелгән өчпочмак $A_1B_1C_1$ өчпоч-

магына чагылдырыла. A_1, B_1, C_1 түбәләренең координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

23. $A(2; -3)$ ноктасы аша үтүче $\vec{n}(-4; 1)$ векторына перпендикуляр туры тигезләмәсен төзегез.

24. $ABCD$ квадратында A һәм B түбәләренең координаталары билгеле: $A(1; -2)$, $B(4; -1)$. C һәм D түбәләренең координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

25. $ABCD$ квадраты бирелгән: Аның A һәм C түбәләренең координаталары билгеле: $A(2; -4)$, $C(-1; 3)$. B һәм D түбәләренең һәм бирелгән квадрат үзәгенең—M ноктасының координаталарын исәпләп чыгарыгыз.

26. $3x - y + 4 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$ турыларының үзара перпендикуляр икәнлегенә ышаныгыз.

27. Туры үзенең тигезләмәсе белән бирелгән: $5x + 3y - 1 = 0$. Бу турыга параллель булган берәмлек векторның координаталарын табыгыз.

28. $A(1; 3)$, $B(2; -1)$, $C(4; k)$ булган ABC өчпочмагы k ның кыйммәте нинди булганда тигезьянлы ($|CA| = |CB|$) булыр?

§ 8. МӘЙДАННАР

1. P, Q, R һәм S—кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагы якларының урталары булса, мәйд. $(ABCD) = 2$ мәйд. $(PRQS)$ икәнен исбатлагыз.

2. Дүртпочмакның урта сызыгы аны тигез зурлыктагы ике кисәккә бүлсә, ул дүртпочмакның трапеция икәнен исбатлагыз.

3. Дүртпочмакның урта сызыклары аны дүрт дүртпочмакка бүләләр. Янәшә ятмаган ике дүртпочмакның мәйданнары суммасы дүртпочмак мәйданының яртысына тигезлеген исбатлагыз.

4. ABC өчпочмагының AC һәм BC яклары өстендә, аның тышында, ирекле рәвештә $ACMN$ һәм $BCPQ$ параллелограммнары төзелгән. Бу параллелограммнарның MN һәм PQ яклары S ноктасында кисешәләр. $[BU] \parallel [SC]$ һәм $|BU| = |SC|$ булган $ABUN$ параллелограммының мәйданы $ACMN$ һәм $BCPQ$ параллелограммнарының мәйданнары суммасына тигезлеген исбатлагыз.

5. Ачык почмакның бер ноктасы аша, бу почмакның яклары белән бергә иң кечкенә мәйданга ия булган өчпочмакны чикләп торырлык итеп, туры үткәрегез.

6. Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагының AB һәм CD яклары өстендә, $|AM|:|MB| = |CN|:|ND|$ булырлык итеп, M һәм N нокталары бирелгән. AN һәм DM кисемтәләре—P ноктасында, ә CM һәм BN кисемтәләре Q ноктасында кисешсеннәр ди. $MQNP$ дүртпочмагының мәйданы APD һәм BCQ өчпочмакларының мәйданнары суммасына тигезлеген исбатлагыз.

7. Өчпочмакның ягы өстендә бирелгән нокта аша үтүче туры белән бу өчпочмакны тигез зурлыктагы ике кисәккә бүлегез.

8. Өчпочмакта медианаларының кисешү ноктасы аша туры үткәрелгән. Төзелгән өчпочмак белән калган кисәкнең мәйданнары чагыштырмасы $\frac{4}{5}$ тән кечерәк түгеллеген исбатлагыз.

9. Түбәндәге үзлекләргә ия булган $ABCD$ кабарынкы дүртпочмагы бирелгән: C ноктасы аша (AD) га параллель итеп үткәрелгән туры белән D ноктасы аша (BC) га параллель итеп үткәрелгән туры AB ягы өстендәге M ноктасында кисешәләр.

$$S_{CMD} = \sqrt{S_{AMD} \cdot S_{BMC}}$$

икәнен исбатлагыз.

10. ABC өчпочмагы өстендә яткан M ноктасы аша аның якларына параллель турылар үткәрелгән. Бу турыларның һәр икесе белән өмпочмакның бер ягы яңа өчпочмак төзи. Бу өчпочмакларның мәйданнары S_1, S_2, S_3 кә, бирелгән өчпочмакның мәйданы S ка тигез булса, $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$ икәнен исбатлагыз.

11. M ноктасы $ABCD$ дүртпочмагыныкы. AMB, BMC, CMD, DMA өчпочмаклары тигез зурлыкта булсалар, бу дүртпочмак параллелограмм булырмы?

12. $ABCD$ кабарынкы дүртпочмагы бирелгән. M һәм N ноктлары AB ягын—өч конгруэнт кисемтәгә, M һәм N нокталары каршы яткан DC ягын шулай ук өч конгруэнт кисемтәгә бүләләр.

MNN_1M_1 кабарынкы дүртпочмагының мәйданы бирелгән дүртпочмак мәйданының $\frac{1}{3}$ ен тәшкил иткәнен исбатлагыз.

13*. $ABCD$ дүртпочмагы бирелгән. Аның һәр ягы өч конгруэнт кисемтәгә бүленгән һәм капма-каршы якларда урнашкан бүлү нокталары кисемтәләр белән тоташтырылган. Әлеге кисемтәләр белән бирелгән дүртпочмак 9 кабарынкы дүртпочмакка бүленә. Аларның шулар арасыннан бирелгән дүртпочмакның яклары белән уртак ноктасы булмаганының мәйданы бирелгән дүртпочмак мәйданының $\frac{1}{9}$ ен тәшкил иткәнлеген исбатлагыз.

14. ABC өчпочмагының BC, AC һәм AB яклары өстендә A_1, B_1, C_1 нокталары бирелгән, өстәвенә, $\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B} = 2$. AA_1, BB_1, CC_1 турылары пар-пар M, N, P нокталарында кисешәләр: $M = (BB_1) \cap (CC_1)$, $N = (CC_1) \cap (AA_1)$, $P(AA_1) \cap \cap (BB_1)$.

MNP өчпочмагының мәйданы бирелгән өчпочмак мәйданының $\frac{1}{7}$ ен тәшкил иткәнлеген исбатлагыз.

15. $ABCD$ параллелограммы бирелгән, M, N, P, Q нокталары—AB, BC, CD, DA якларының урталары. AP, CM, DN һәм BQ турылары үзара кисешеп, дүртпочмак төзиләр. Бу дүртпоч-

макның параллелограмм икәнен һәм мәйданы бирелгән параллелограмм мәйданының $\frac{1}{5}$ ен тәшкил иткәнлеген исбатлагыз.

16. $ABCD$ параллелограммында M һәм N нокталары — AB һәм AD якларының урталары. DM һәм BN турылары P ноктасында кисешәләр. $AMPN$ дүртпочмагының мәйданы параллелограмм мәйданының нинди өлешен тәшкил итә?

17. $ABCD$ параллелограммы бирелгән. AB һәм AD яклары өстендә тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталары алынган, өстәвенә, $|AM|:|MB|=k$, $|AN|:|NK|=l$. BN һәм DM турылары P ноктасында кисешәләр. $AMPN$ дүртпочмагының мәйданы параллелограмм мәйданының нинди өлешен тәшкил итә?

18. Параллелограммның һәр ягының уртасы капма-каршы якның түбәләре белән тоташтырылган. Төзелгән сигезпочмакның мәйданы параллелограмм мәйданының $\frac{1}{6}$ ен тәшкил иткәнлеген исбатлагыз.

19*. ABC өчпочмагына $A_1B_1C_1$ өчпочмагы камалган һәм шул ук өчпочмакны камаучы $A_2B_2C_2$ өчпочмагы төзелгән, өстәвенә, төзелгән өчпочмакларның тиңдәшле яклары параллельләр.

$$S^2_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} \cdot S_{A_2B_2C_2}$$

икәнен исбатлагыз.

20*. $ABCDEF$ кабарынкы алтыпочмагының капма-каршы яклары пар-пар параллельләр. ACE һәм BDF өчпочмакларының тигез зурлыкта икәнен исбатлагыз.

21*. Бишпочмак бирелгән, анда бишпочмакның түбәләрен каршы яткан якның урталары белән тоташтыручы биш кисемтә үткәрелгән. Бу кисемтәләрнең дүртесе бер уртак ноктага ия булса, ул ноктаның бишенче кисемтә өстендә дә ятканлыгын исбатлагыз.

22. $ABCD$ трапециясенең ян ягы CD ның озынлыгы a га тигез, ә $[AB]$ ның уртасыннан (CD) га кадәр ераклык b га тигез. Трапециянең мәйданын табыгыз.

23. Кабарынкы дүртпочмакта диагональләренең озынлыклары тигез булса, аның мәйданы дүртпочмакның урта сызыклары озынлыкларының тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.

24. Дүртпочмакның диагональләренең озынлыклары a га, ә урта сызыкларының озынлыклары суммасы b га тигез. Дүртпочмакның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

25. Ягы a га тигез булган квадрат эченә, һәр ягы өстендә бер түбәсе ятарлык итеп, турыпочмаклык камалган. Мәйданы S ка тигез булса, турыпочмаклыкның (квадрат булмаганда) диагональләрен исәпләп чыгарыгыз.

26. Өчпочмакның биеклеге нигезеннән аның калган ике ягына перпендикуляр торгызылган. Әгәр бу перпендикулярларның нигезләре шушы өчпочмакны камаучы әйләнә үзәге белән бер туры өстендә ятсалар, бу туры өчпочмакны тигез зурлыктагы кисәкләргә бүлгәнен исбатлагыз.

§ 9. МЕТРИК БӘЙЛӘНЕШЛӘР

1. $2h_c = |AB|$, $\hat{A} = 75^\circ$ булганда, C почмагының зурлыгын табыгыз.

2. $|AC| = |BC|$, $\hat{C} = 80^\circ$ булган тигезьянлы ABC өчпочмагының A һәм B түбәләре аша, өчпочмак эчендәге O ноктасында кисешерлек итеп, турылар үткәрелгән. $\widehat{OAB} = 10^\circ$, $\widehat{ABO} = 20^\circ$ булса, ACO почмагын табыгыз.

3. $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{E}$, $\hat{D} = 60^\circ$, $|EA| = |AB| = |BC| = a$ булган $ABCDE$ бишпочмагы бирелгән. $|CD|$, $|DE|$ ны һәм бу бишпочмакның мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

4. $\hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = \hat{E}$, $|BC| = m$, $|CD| = n$, $|DE| = p$ булган $ABCDE$ бишпочмагы бирелгән. $|AB|$, $|AE|$ ны исәпләп чыгарыгыз.

5. ABC өчпочмагының ортоүзәге һәм центроиды аша үтүче туры AB ягына параллель булса, $\operatorname{tg}\hat{A} \cdot \operatorname{tg}\hat{B} = 3$ икәнен исбатлагыз.

6. ABC өчпочмагында A һәм B почмакларының аермасы 90° ка тигез булса, аның якларының озынлыклары үзара нинди бәйләнештә булыр?

7. Ягы a га тигез булган $ABCD$ квадратының B, C, D түбәләре l турысының бер ягында, A түбәсе икенче ягында урнашкан. Квадратның капма-каршы түбәләреннән l турысына кадәр ераклыкларның тапкырчыгышлары үзара тигез булса, квадратның үзәгеннән l турысына кадәр ераклыкны табыгыз.

8. ABC өчпочмагының C түбәсе һәм AC, BC якларының урталары аша үткәрелгән әйләнә өчпочмак медианаларының кисешү ноктасы аша үтсә, өчпочмакта a, b һәм c якларының озынлыклары арасындагы бәйләнешне табыгыз.

9. $\cos\hat{B} = \frac{R-r}{R}$ булганда, ABC өчпочмагы якларының озынлыклары арасындагы бәйләнешне табыгыз.

10. ABC өчпочмагының AA_1 медианасы, BB_1 биеклеге һәм CC_1 биссектрисасы бер ноктада кисешсәләр, аның якларының озынлыклары арасындагы бәйләнешне табыгыз.

11. ABC өчпочмагының AB ягы өстендә, $\widehat{ACM} = \varphi$, $\widehat{BCM} = \psi$ булырлык итеп, M ноктасы бирелгән. Өстәвенә $\widehat{NCM} = 90^\circ$ итеп, $M \in (AB)$ ноктасы төзелгән. $|AN|:|NB|$ чагыштырмасын исәпләп чыгарыгыз.

12. ABC өчпочмагының a, b яклары белән h_a һәм h_b биеклекләре үзара $a + h_a = b + h_b$ бәйләнешендә булсалар, өчпочмакның төрен ачыклагыз.

13. Тигезьянлы $ABCD$ трапециясенең ($[AB] \parallel [CD]$) диагональләре O ноктасында 60° лы почмак ясап кисешәләр ($\widehat{AOB} = 60^\circ$). AO, OD һәм BC кисемтәләренең урталары тигезьяклы өчпочмакның түбәләре икәнен исбатлагыз.

14. Әгәр H_1 һәм H_2 — ABC өчпочмагының A һәм B түбәләреннән төшерелгән биеклекләрнең нигезләре булса, ул вакытта $|H_1H_2| = |AB| \cdot |\cos \hat{C}|$ икәнен исбатлагыз.

15. $ABCD$ кабарынкы дүртпочмагы бирелгән. AB һәм CD якларының дәвамнары — M ноктасында, ә BC һәм DA якларының дәвамнары N ноктасында кисешәләр. M һәм N почмакларының биссектрисалары үзара перпендикуляр булсалар, $ABCD$ дүртпочмагын камаучы әйләнә үткәрергә мөмкин икәнен исбатлагыз.

16. Әйләнәгә $ABCD$ дүртпочмагы камалган. $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$ икәнен исбатлагыз.

17. Әйләнәгә ABC өчпочмагы камалган. Шул әйләнәгә A һәм B нокталарында үткәрелгән орынмалар D ноктасында кисешәләр. CD турысы (AB) ны M ноктасында кисеп үтсен ди. $|AM| : |MB| = |AC|^2 : |BC|^2$ икәнен исбатлагыз.

18. Тигезьянлы ABC өчпочмагының AB нигезе өстендә ирекле рәвештә D ноктасы алынган. $|CD|^2 = |AC|^2 - |AD| \cdot |DB|$ икәнен исбатлагыз.

19. Әгәр өчпочмакны камаучы R радиуслы әйләнә һәм аңа камаулы r радиуслы әйләнә үткәрелеп, әйләнәләрнең үзәкләре арасындагы ераклык d га тигез булса, $d^2 = R^2 - 2Rr$ (Эйлер формуласы) икәнен исбатлагыз.

20. Әгәр CC_1 — ABC өчпочмагында C почмагының биссектрисасы булса, $|CC_1|^2 = |CA| \cdot |CB| - |AC_1| \cdot |BC_1|$ икәнен исбатлагыз.

21. ABC өчпочмагына ике конгруэнт әйләнә камалган: алар үзара орыналар, өстәвенә бер әйләнә өчпочмакның AB һәм AC якларына, ә икенчесе AB һәм BC якларына орына. $\frac{1}{\rho} = \frac{2}{c} + \frac{1}{r}$ икәнен исбатлагыз, монда $c = |AB|$, r — өчпочмакка камаулы әйләнә радиусы, ρ — һәр конгруэнт әйләнә радиусы.

22. $ABCD$ параллелограммы бирелгән. ABC һәм ABD өчпочмакларын камаучы (O_1, R_1), (O_2, R_2) әйләнәләре төзелгән $|O_1D|^2 + |O_2C|^2 = R_1^2 + R_2^2$ бәйләнешенең дөреслеген исбатлагыз.

23. Параллелограмм якларының озынлыклары a һәм b га, диагональләренең озынлыклары e һәм f ка тигез. $e^2 f^2 = a^4 + b^4$ бәйләнешенең үтәлүе параллелограммның почмагы $45°$ ка тигез булсын өчен кирәкле һәм җитәрлек шарт булып торганын исбатлагыз.

24. ABC өчпочмагының C түбәсеннән AB ягы өстендә яткан C_1 ноктасына кадәр ераклык $d^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2$ формуласы белән аңлатылганын исбатлагыз, монда $p = |AC_1| : |AB|$, $q = |BC_1| : |AB|$, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ (Стюарт формуласы).

25. ABC өчпочмагында A почмагы биссектрисасының озынлыгы l өчпочмак якларының озынлыгы аша $l_A = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ формуласы белән аңлатылганын исбатлагыз.

26. Өчпочмакны камаучы әйләнә үзәге O дан аның биеклекләренең кисешү ноктасы H ка кадәр ераклык өчпочмакның яклары һәм камаучы әйләнәнең радиусы аша түбәндәге формула белән күрсәтелгәнен исбатлагыз: $|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

27. Өчпочмакның почмаклары өчен түбәндәге формулаларның дөреслеген тикшерегез:

$$\sin^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1-\cos\hat{A}}{2}, \quad \cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1+\cos\hat{A}}{2}.$$

28. ABC өчпочмагы өчен аның элементларының зурлыклары арасындагы түбәндәге бәйләнешләр урынлы булыр. Шуны исбатлагыз:

$$\sin\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{bc}\sqrt{(p-b)(p-c)}, \ \cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{p(p-a)} : \sqrt{bc}$$

(p — өчпочмакның ярымпериметры).

29. Өчпочмак өчен түбәндәге бәйләнешләрнең дөреслеген исбатлагыз:

$$a\cos\hat{B} + b\cos\hat{A} = c,$$
$$b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B} = a,$$
$$c\cos\hat{A} + a\cos\hat{C} = b.$$

Бу бәйләнешләрдән косинуслар теоремасын чыгарыгыз:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\hat{C}.$$

30. Өчпочмак почмакларының косинуслары түбәндәге бәйләнешкә ия икәнен исбатлагыз:

$$\cos^2\hat{A} + \cos^2\hat{B} + \cos^2\hat{C} + 2\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C} = 1.$$

31. ABC өчпочмагының почмаклары өчен түбәндәге тигезлекнең дөрес икәнен исбатлагыз: $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\times$
$\times\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = 1.$

32. ABC өчпочмагының почмаклары өчен түбәндәге тигезлек дөрес икәнен исбатлагыз:

$$\operatorname{ctg}\hat{A}\cdot\operatorname{ctg}\hat{B} + \operatorname{ctg}\hat{B}\cdot\operatorname{ctg}\hat{C} + \operatorname{ctg}\hat{C}\cdot\operatorname{ctg}\hat{A} = 1.$$

33. ABC өчпочмагының почмаклары үзара түбәндәге бәйләнештә икәнен исбатлагыз:

1) $\sin\hat{C} = \sin\hat{A}\cdot\cos\hat{B} + \sin\hat{B}\cdot\cos\hat{A};$

2) $\cos\frac{\hat{C}}{2} = \sin\frac{\hat{A}}{2}\cdot\cos\frac{\hat{B}}{2} + \cos\frac{\hat{A}}{2}\cdot\sin\frac{\hat{B}}{2}$;

3) $\sin 2\hat{C} = -\sin 2\hat{A}\cdot\cos 2\hat{B} - \sin 2\hat{B}\cdot\cos 2\hat{A}$.

34. *ABC* өчпочмагының почмаклары үзара түбәндәге бәйләнештә икәнен исбатлагыз:

1) $\sin^2\frac{\hat{A}}{2} + \sin^2\frac{\hat{B}}{2} + \sin^2\frac{\hat{C}}{2} + 2\sin\frac{\hat{A}}{2}\cdot\sin\frac{\hat{B}}{2}\cdot\sin\frac{\hat{C}}{2} = 1$;

2) $\cos^2 2\hat{A} + \cos^2 2\hat{B} + \cos^2 2\hat{C} - 2\cos 2\hat{A}\cdot\cos 2\hat{B}\cdot\cos 2\hat{C} = 1$.

35. *M* — *ABCD* турыпочмаклыгы ноктасы. $\frac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \frac{\operatorname{tg}\widehat{AMC}}{\operatorname{tg}\widehat{BMD}}$ икәнен исбатлагыз.

36. *ABC* өчпочмагының почмаклары $\operatorname{tg}\hat{A}\cdot\operatorname{tg}\hat{B} = 2$ бәйләнешендә. Өчпочмак биеклекләренең кисешү ноктасы *AB* ягына төшерелгән биеклекне урталай бүлгәнен исбатлагыз.

§ 10. НОКТАЛАРНЫҢ КҮПЛЕКЛӘРЕ

1. *AB* ягы уртак булган һәм бирелгән әйләнәгә камалган барлык өчпочмак медианаларының кисешү нокталары күплеге *M* ны табыгыз.

2. *ABC* өчпочмагында *APB* һәм *BPC* өчпочмакларының мәйданнары суммасы *CPA* өчпочмагының мәйданына тигез булган барлык *P* нокталары күплеге *M* ны табыгыз.

3. *ABC* өчпочмагында *APB*, *BPC*, *CPA* өчпочмакларыннан теләсә кайсы икесенең мәйданнары суммасы өченчесенең мәйданыннан зуррак булган барлык *P* нокталары күплеге *M* ны табыгыз.

4. Параллель булмаган *AB* һәм *CD* кисемтәләре бирелгән. *PAB* һәм *PCD* өчпочмакларының мәйданнары тигез булган барлык *P* нокталары күплеге *M* ны табыгыз.

5. Бирелгән *AB* кисемтәсе кысынкы (җәенке) почмак белән күренә торган барлык нокталар күплеге *M* ны характерлап бирегез.

6. *ABCD* квадраты бирелгән. *AB* һәм *CD* турыларыннан ераклыкларының квадратлары суммасы *BC* һәм *AD* турыларыннан ераклыкларының квадратлары суммасына тигез булган барлык *P* нокталары күплеге *M* ны табыгыз.

7. $|PA|$ һәм $|PB|$ — бирелгән үзара перпендикуляр ике турыдан *P* ноктасының ераклыклары. $|PA| + |PB| = c$ (монда c — даими зурлык) булган *P* нокталары күплеге *M* ны атап күрсәтегез.

8. $|CA| = |CB|$ булган тигезьянлы *ABC* өчпочмагы бирелгән. *AC* һәм *BC* яклары өстендә, $|AP| = |CQ|$ булырлык итеп, тиң-

дәшле рәвештә ниндидер P һәм Q нокталары алынган. Барлык PQ кисемтәләренең урталары күплеге M ны табыгыз.

9. Бирелгән әйләнәгә камалган барлык өчпочмак биеклекләренең кисешү нокталары күплеге M ны табыгыз.

10. AOB почмагы бирелгән. $C \in AOB$ ноктасының OA һәм OB турыларына проекцияләре P һәм Q төзелгән. $|PQ| = d$ ($d > 0$ — даими зурлык) булган барлык C нокталары күплеге M ны табыгыз.

11. ω_1 һәм ω_2 әйләнәләре A һәм B нокталарында кисешәләр. A ноктасы аша ω_1 не C ноктасында, ә ω_2 не D ноктасында кисеп үтүче a турысы үткәрелгән. P ноктасы CD кисемтәсен $\overrightarrow{CP} : \overrightarrow{PD} = k$ чагыштырмасында бүлсен ди. a турысы A үзәкле барлык турылар бәйләмен сурәтләгәндә, P нокталары күплеге M ны табыгыз.

12. Яссылыкның $|PA| : |PB| = k$ тигезлеге үтәлгән барлык P нокталары күплеге әйләнә төзегәнлеген исбат итегез (монда A һәм B—бирелгән төрле ике нокта, k—берәмлеккә тигез булмаган уңай сан).

13. Әйләнә өстендә A һәм B нокталары бирелгән. Бирелгән әйләнәнең конгруэнт хордалары: AN һәм BP парларының барлык кисешү нокталары күплеге M ны атап күрсәтегез.

14. Тигезьяклы ABC өчпочмагы бирелгән. $|PA| + |PB| = |PC|$ тигезлеге үтәлгән барлык P нокталары күплеге M ны табыгыз.

15. Квадратның шундый нокталары күплеге M ны табыгыз, ул нокталарның һәркайсыннан якларның ераклыклары квадратлары суммасы даими булсын.

16. Бер яклары уртак булган һәм бирелгән әйләнәгә камалган өчпочмаклар эченә камаулы барлык әйләнәләрнең үзәкләре күплеге M ны табыгыз.

17. Даими a озынлыгындагы кисемтәнең очлары почмакның яклары буенча шуа. Кисемтәнең очларыннан почмакның якларына үткәрелгән перпендикулярларның кисешү нокталары күплеге M ның әйләнә дугасы төзегәнлеген исбатлагыз.

18. ABC өчпочмагы бирелгән. AB турысы өстендә бирелгән K ноктасы аша (AC) һәм (BC) ны тиңдәшле рәвештә N һәм P нокталарында кисүче туры үткәрелгән. AKN һәм BKP өчпочмакларын камаучы әйләнәләр Q ноктасында кисешәләр. Q нокталары күплеге M ABC өчпочмагын камаучы әйләнә төзегәнлеген исбатлагыз.

19. Туры R радиуслы әйләнәне A һәм B нокталарында кисеп үтә. Бу турының ирекле P ноктасы аша, бирелгән әйләнәгә A һәм B нокталарында орындырып, ике әйләнә үткәрелгән. 1) Бу әйләнәләрнең радиуслары арасындагы бәйләнешне; 2) аларның икенче кисешү нокталары күплеге M ны табыгыз.

20. a, b, c турылары O ноктасында кисешәләр. A, B һәм C нокталары P ноктасының бирелгән турыларга проекцияләре булып торалар. ABC өчпочмагының мәйданы даими һәм S ка тигез булган барлык P нокталары күплеге M ны табыгыз.

21. AC һәм BC кисемтәләре бирелгән. ACP һәм BCP әйләнәләре бирелгән зурлыктагы почмак ясап кисешә торган P нокталары күплеге M ны табыгыз.

22*. Әйләнәдә бирелгән хорданы кисеп үтүче шул ук әйләнә хордаларының урталары күплеге M ны табыгыз.

23. ABC өчпочмагында AB һәм BC турыларыннан ераклыкларының суммасы CA турысыннан ераклыгына тигез булган барлык P нокталары күплеге M ны табыгыз.

24. Әйләнә өстендә A һәм B нокталары бирелгән. Һәр P ноктасы өчен $|PA|\cdot|PB|$ тапкырчыгышы бирелгән әйләнәгә шул ноктадан үткәрелгән орынманың PT кисемтәсе озынлыгы квадратына тигез булган P нокталары күплеге M ны табыгыз (T — орыну ноктасы).

§ 11. ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

1. Теләсә нинди өчпочмакта медиана почмакны зуррагы кечерәк як янында яткан кисәкләргә бүлгәнен исбатлагыз.

2. Теләсә нинди ABC өчпочмагында CM медианасының озынлыгы CL биссектрисасы озынлыгыннан кыска түгеллеген исбатлагыз.

3. Әйләнәнең кисешүче (кисешмәүче) үзара перпендикуляр хордалары озынлыкларының квадратлары суммасы аның диаметры квадратыннан зуррак (кечерәк) икәнен исбатлагыз.

4. AOB почмагының l биссектрисасы өстендә P ноктасы бирелгән. Шул нокта аша очлары почмакның яклары өстендә яткан CD һәм MN кисемтәләре үткәрелгән. CD кисемтәсе почмакның биссектрисасына перпендикуляр булса, $|CD|<|MN|$ икәнен исбатлагыз.

5. $0°\leqslant\alpha\leqslant 90°$ булса, $\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$ икәнен исбатлагыз.

6. AOB почмагыныкы булган M ноктасы аша, OCQ өчпочмагының мәйданы иң кечкенә кыйммәткә ия булырлык итеп, почмакның якларын S һәм Q нокталарында кисеп үтүче p турысы үткәрегез.

7. m_a һәм m_b — турыпочмаклы өчпочмакның катетларына үткәрелгән медианаларының озынлыклары булса, $\frac{1}{2}<\frac{m_a}{m_b}<2$ икәнен исбатлагыз.

8. Теләсә нинди ABC өчпочмагы өчен $l_A^2+l_B^2+l_C^2\leqslant p^2$ тигезсезлеге урынлы икәнен исбатлагыз, монда l_A — өчпочмакның A почмагының биссектрисасы, p — ярымпериметр.

9. Теләсә нинди өчпочмак өчен $p^2\geqslant 27r^2$, $S\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ тигезсезлекләре урынлы икәнен исбатлагыз, монда p — ярымпериметр, r — камаулы әйләнәнең радиусы, S — өчпочмак мәйданы.

10. Теләсә нинди ABC өчпочмагы өчен $h_A\leqslant\sqrt{p(p-a)}$ икәнен исбатлагыз, h_A — монда A түбәсеннән үткәрелгән биеклек озынлыгы, p — ярымпериметр.

11. ABC өчпочмагында A почмагының биссектрисасы l_A белән аның якларының озынлыклары өчен $l_A \leqslant \sqrt{p(p-a)}$ тигезсезлеге урынлы икәнен исбатлагыз.

12. ABC өчпочмагында $a > b$ булса, $a + h_a \geqslant b + h_b$ икәнен исбатлагыз, h_a, h_b — монда BC һәм AC якларына үткәрелгән биеклекләр.

13. Теләсә нинди ABC өчпочмагы өчен $S \leqslant \frac{b^2+c^2}{4}$ тигезсезлеге урынлы икәнен исбатлагыз, монда S — мәйдан, b һәм c — өчпочмак якларының озынлыклары.

14. ABC өчпочмагының почмаклары өчен $\operatorname{tg}\hat{A}\cdot\operatorname{tg}\hat{B} > 1$ тигезсезлеге үтәлсә — өчпочмак кысынкыпочмаклы, ә $0 < \operatorname{tg}\hat{A}\cdot\operatorname{tg}\hat{B} < 1$ тигезсезлеге үтәлсә, җәенкепочмаклы икәнен исбатлагыз.

15. Өчпочмак өчен $a \geqslant 2h\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}$ тигезсезлеге урынлы икәнен исбатлагыз.

16. Турыпочмаклы өчпочмак өчен $R + r \geqslant \sqrt{2S}$ тигезсезлеге урынлы икәнен исбатлагыз, монда R һәм r — камаучы һәм камаулы әйләнәләрнең радиуслары, S — өчпочмак мәйданы.

17. Теләсә нинди ABC өчпочмагы өчен

$$\sin\frac{\hat{A}}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}},\quad \sin\frac{\hat{A}}{2}\cdot\sin\frac{\hat{B}}{2}\cdot\sin\frac{\hat{C}}{2} \leqslant \frac{1}{8}$$

тигезсезлекләре урынлы икәнен исбатлагыз.

18. ABC өчпочмагының почмаклары өчен түбәндәге тигезсезлекләрнең дөреслеген исбатлагыз:

1) $\sin^2\frac{\hat{A}}{2} + \sin^2\frac{\hat{B}}{2} + \sin^2\frac{\hat{C}}{2} \geqslant \frac{3}{4}$;

2) $\cos\frac{\hat{A}}{2} + \cos\frac{\hat{B}}{2} + \cos\frac{\hat{C}}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

19. Ирекле рәвештә алынган ABC өчпочмагы өчен

$$\sin\left(45^\circ - \frac{\hat{A}}{4}\right)\cdot\sin\left(45^\circ - \frac{\hat{B}}{4}\right)\cdot\sin\left(45^\circ - \frac{\hat{C}}{4}\right) \leqslant \frac{1}{8}$$

тигезсезлеге урынлы икәнен исбатлагыз.

20. Теләсә нинди ABC өчпочмагы өчен түбәндәге тигезсезлекләр урынлы икәнен исбатлагыз:

1) $\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C} \leqslant \frac{1}{8}$;

2) $\cos^2\hat{A} + \cos^2\hat{B} + \cos^2\hat{C} \geqslant \frac{3}{4}$.

21. $\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} \geqslant \frac{9}{4}$ тигезсезлегенең дөреслеген исбатлагыз, монда A, B, C — өчпочмакның почмаклары.

22. Өчпочмак почмакларының зурлыклары

$$\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} + \cos 2\hat{C} \geqslant -\frac{3}{2}$$

тигезсезлеген канәгатьләндергәнен исбатлагыз.

23. R радиуслы әйләнәдә 90° лы дуганы тартып торучы хорда үткәрелгән. A һәм B нокталары аша AC һәм BD параллель хордалары үткәрелгән. $|AC|\cdot|BD| \leqslant |AB|^2$ икәнен исбатлагыз.

24. Теләсә нинди өчпочмак өчен $S \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$ тигезсезлеге үтәлгәнлеген исбатлагыз, монда S — өчпочмак мәйданы, a, b, c — якларының озынлыклары.

25. Яссылык өстендә дүрт нокта: A, B, C, D бирелгән.

$$|AB|\cdot|CD| + |AC|\cdot|BD| \geqslant |AD|\cdot|BC|$$

икәнен исбатлагыз.

ҖАВАПЛАР ҺӘМ КҮРСӘТМӘЛӘР

I бүлек. ГЕОМЕТРИЯНЕҢ БАШЛАНГЫЧ ТӨШЕНЧӘЛӘРЕ

§ 1. КЕРЕШ

1. а) Икенче шарт беренчесенә каршы килгәнлектән, андый нокталарны төзеп булмый.

б) Төзергә мөмкин. X, Y һәм Z нокталары бер туры өстендә яталар, өстәвенә, Y ноктасы X һәм Z нокталары арасында ята.

в) Төзергә мөмкин. X, Y һәм Z нокталары бер туры өстендә яталар, өстәвенә, Z ноктасы X һәм Y нокталары арасында ята.

2. а) Ераклыкларның үзлекләре буенча:

$$|AB| + |BC| \geqslant |AC|; \; |AB| - |BC| \leqslant |AC|.$$

Шулай булгач, $|AC| \leqslant 20$ км $+ 12$ км; $|AC| \leqslant 32$ км;

$$|AC| \geqslant 20 \text{ км} - 12 \text{ км}; \; |AC| \geqslant 8 \text{ км}.$$

б) $|AC|$ ның мөмкин булган кыйммәтләренең иң зурысы — 32 км (B пункты A һәм C пунктлары арасында урнашкан). $|AC|$ ның мөмкин булган кыйммәтләренең иң кечкенәсе — 8 км (C пункты A һәм B пунктлары арасында урнашкан).

3. Күрсәтмә. Бер-берсеннән 9 см еракльта урнашкан A һәм B нокталарын үзәк итеп алып, 10 см радиуслы әйләнәләр төзегез. Төзелгән түгәрәкләрнең уртак кисәге беренче таләпкә җавап бирә. Төзелгән түгәрәкләрнең берсенә генә булса да туры килгән барлык нокталар икенче таләпкә җавап бирәләр.

4. Андый „еракльклар" өчен $|AB| = |BA|$, $|AB| + |BC| \geqslant \geqslant |AC|$ кебек үзлекләрнең үтәлмәве мөмкин.

5. а) $r_1 - r_2 \leqslant |O_1O_2| \leqslant r_1 + r_2$.

б) $r_1 - r_2 < |O_1O_2| < r_1 + r_2$.

в) $|O_1O_2| < r_1 - r_2$; $|O_1O_2| > r_1 + r_2$.

6. а) AB кисемтәсенең B ноктасыннан башка барлык нокталары күплеге.

б) AB кисемтәсенең уртасы булган нокта.

в) AC кисемтәсе, монда C — AB кисемтәсенең уртасы.

г) AB кисемтәсенең уртасыннан башка барлык нокталары.

7. а) Ачык түгәрәк, ягъни (O, r) түгәрәге, ләкин моңа (O, r) әйләнәсе нокталары керми.

б) Яссылыкның (O, r) түгәрәгенеке булмаган барлык нокталары.

в) Яссылыкның ачык (O, r) түгәрәгенеке булмаган барлык нокталары.

г) (O, r) түгәрәге үзенең үзәгеннән башка.

8. а) A һәм B нокталары. б) AB кисемтәсе.

в) AB кисемтәсенең эчке нокталары күплеге.

г) AB кисемтәсендә яткан, башлары A һәм B нокталарында булган һәм (O, r) әйләнәсенә карата аның тышкы өлкәсендә урнашкан нурлар.

д) Алдагы очрактагы ук нурлар, ләкин A һәм B нокталарыннан башка (ачык нурлар).

е) AB турысы, ләкин A һәм B нокталарыннан башка.

10. а) (O_1, r_1) һәм (O_2, r_2) ачык түгәрәкләренең берләшмәсе.

б) Яссылыкның (O_1, r_1) һәм (O_2, r_2) түгәрәкләренең берләшмәсеннән башка барлык нокталары.

в) Яссылыкның O_1O_2 кисемтәсе нокталарыннан башка барлык нокталары.

11. а) BA нурында AB кисемтәсенең эчке нокталарыннан һәм B ноктасыннан башка барлык нокталар.

б) BA нурында AB кисемтәсенең эчке нокталарыннан һәм A ноктасыннан башка барлык нокталар.

в) AB кисемтәсенең нокталары күплеге.

12. а) Өчпочмак. б) Өчпочмак, дүртпочмак.

в) Өчпочмак, дүртпочмак, бишпочмак һәм алтыпочмак.

г) Өчпочмак, дүртпочмак, бишпочмак, алтыпочмак, җидепочмак.

13. X һәм Y нокталары бирелгән түгәрәкләрнең уртак кисәгенеке — F фигурасыныкы булсын. XY кисемтәсенең барлык нокталары беренче түгәрәкнеке дә, икенче түгәрәкнеке дә. Шулай булгач, $[XY] \subset F$. Моннан F фигурасының кабарынкы икәнлеге килеп чыга.

14. Чишелешнең кыскача язылышын бирик. $F_1 \cap F_2 = F$ һәм $X \in F$, $Y \in F$.

Ул вакытта

$$\frac{\left.\begin{matrix} X \in F \\ Y \in F \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} X \in F_1, \ Y \in F_1 \\ X \in F_2, \ Y \in F_2 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} [XY] \subset F_1 \\ [XY] \subset F_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow [XY] \subset F.}{F_1 \cap F_2 = F - \text{кабарынкы фигура.}}$$

15. а) Төрле дүрт кисәк.
б) Төрле җиде кисәк.
в) Төрле алты кисәк.
г) Төрле сигез кисәк.

§ 2 ФИГУРАЛАРНЫҢ КОНГРУЭНТЛЫГЫ ҺӘМ КҮЧҮЛӘР

1. A һәм B нокталары түбәндәге ысуллар белән C һәм D нокталарына чагылдырыла ала: $A \rightarrow C$; $B \rightarrow D$ яки $A \rightarrow D$; $B \rightarrow C$. Шулай итеп, төрле ике чагылдыру булуы мөмкин. Бу чагылды-

руларның һәркайсы кайтма, чөнки беренче парның ике ноктасына икенче парның төрле ике ноктасы туры килә.

2. Бу мәсьәләләргә җаваплар 87 — 92 нче рәсемнәрдә күрсәтелгән.

3. A, B нокталары парын бер C ноктасыннан торган күплеккә бер юл белән чагылдырырга мөмкин: $A \to C$, $B \to C$.

Бу чагылдыру кайтма түгел, чөнки беренче күплекнең төрле ике ноктасына икенче күплекнең бер ноктасы туры килә. Фигураларның кайтма булмаган чагылдыруларына башка мисаллар 93 нче рәсемдә күрсәтелгән.

4. ABC өчпочмагының KD һәм DM кисемтәләренә 94 нче рәсемдә күрсәтелгән чагылдыруы кайтма түгел. ABC өчпочмагының нокталарын $AKDMB$ сынык сызыгы нокталарына чагылдырып булмый, чөнки A һәм B нокталарының образы сыйфатында нинди нокталарны алырга кирәклеге билгеле түгел.

5. Өч элементтан торган күплекне бер элементтан торган күплеккә — бер юл белән (95 нче рәсем, *а*), ике элементтан торган күплеккә — алты юл белән (95 нче рәсем, *б*), өч элементтан торган күплеккә алты юл белән (95 нче рәсем, *в*) чагылдырырга мөмкин.

Өч элементтан торган күплекне дүрт элементтан торган күплеккә чагылдырып булмый, чөнки һәр очракта беренче күплек элементларының образлары булмаган элементлар калачак.

6. а) Нокта ноктага чагыла.

б) Нокталар пары ераклыклары бирелгән парныкы кебек үк булган нокталар парына чагыла.

в) Кисемтәнең очлары бер-берсеннән ераклыклары бирелгән кисемтә озынлыгында булган нокталар парына чагыла. Бирелгән кисемтәнеке булган теләсә нинди нокта бирелгән кисемтә очларының образлары арасында яткан нокталарга чагыла (күчүнең билгеләмәсе буенча). Бу — кисемтәнең образы кисемтә була дигән сүз.

г) Нурның башы — O ноктасы ниндидер O_1 ноктасына чагылыр.

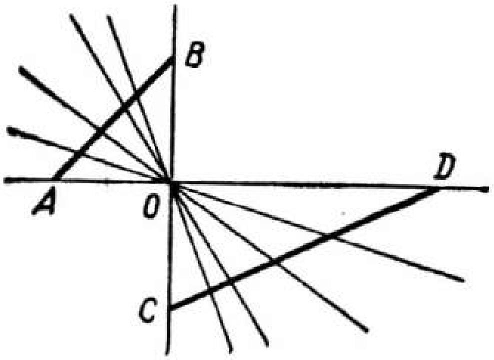
Нурның теләсә нинди ноктасы X, $|OX| = |O_1X_1|$ булырлык итеп, X_1 ноктасына чагылыр. O_1X_1 нурының нокталары бирелгән нурның калган барлык нокталарының образы була.

д) Туры күчкәндә турыга чагыла. Турының ирекле рәвештә алынган X, Y, T нокталары $|X_1Y_1| + |Y_1T_1| = |X_1T_1|$ булырлык итеп чагылалар, ә бу Y_1 ноктасы X_1 һәм T_1 нокталары арасында ята дигән сүз. Ә без нокта ике нокта арасында ятса, алар барысы да бер туры өстендә ятканлыгын беләбез.

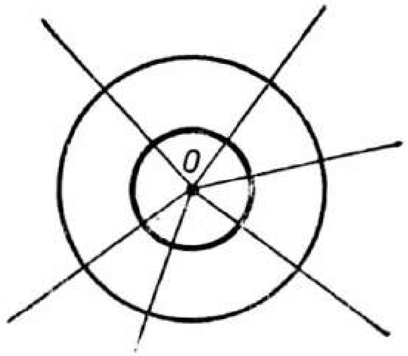
е) Беренче әйләнәнең үзәге образыннан аның радиусы ераклыгында яткан нокталар күплеге O үзәкле беренче әйләнә нокталары күплегенең образы була, ә бу — әйләнә билгеләмәсенә туры килә.

ж) Түгәрәк түгәрәккә чагыла.

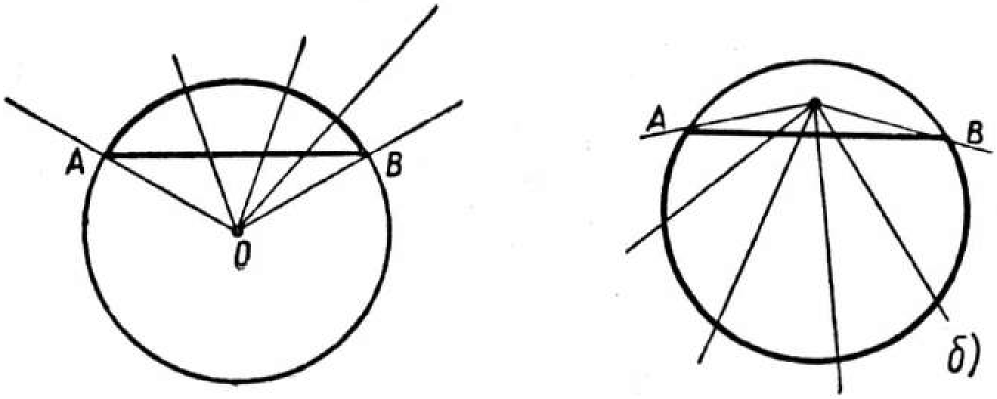
з) Мәсьәләне чишү өчен почмакны ике ярымъяссылыкның кисешмәсе дип карау уңайлы. Бу очракта исбатлау түбәндә әй-



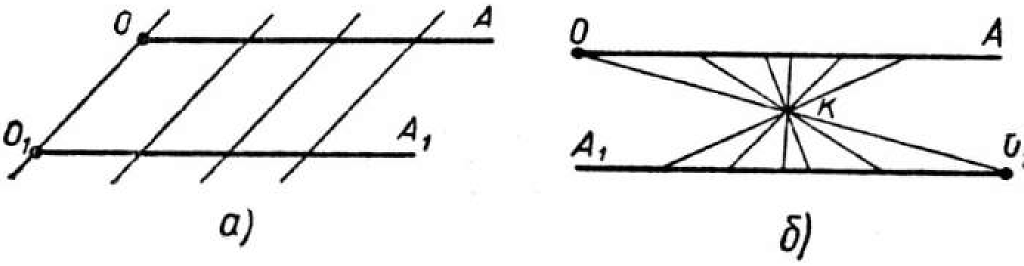
87 нче рәсем



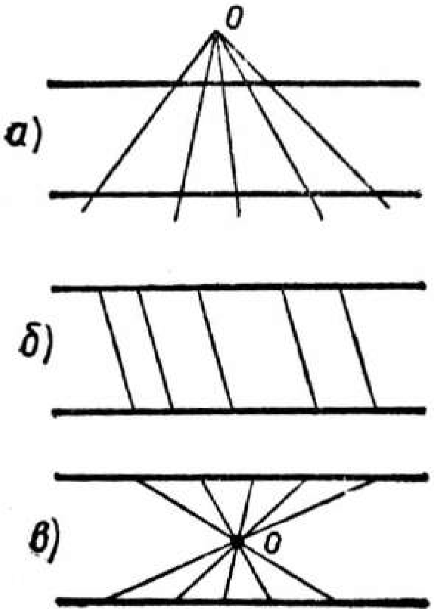
88 нче рәсем



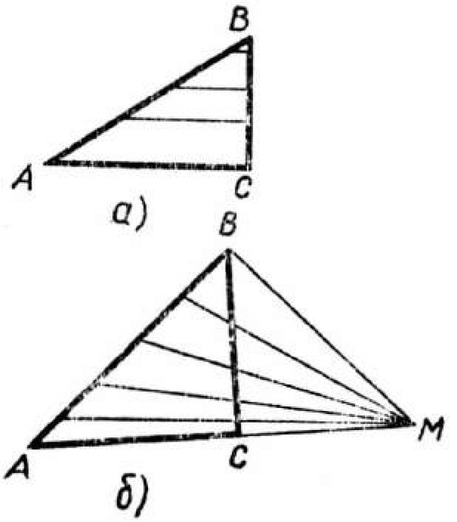
89 нчы рәсем



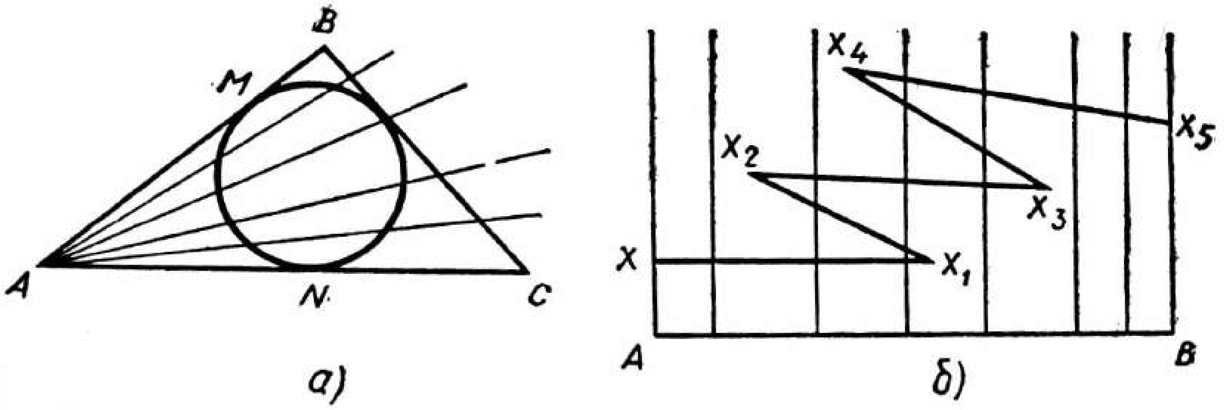
90 нчы рәсем



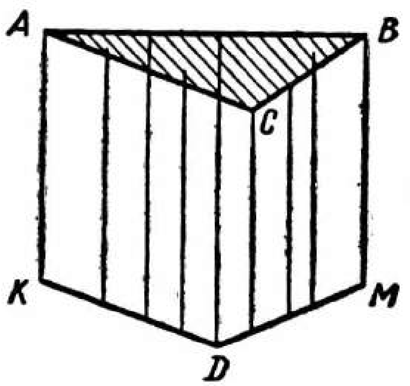
91 нче рәсем



92 нче рәсем



93 нче рәсем



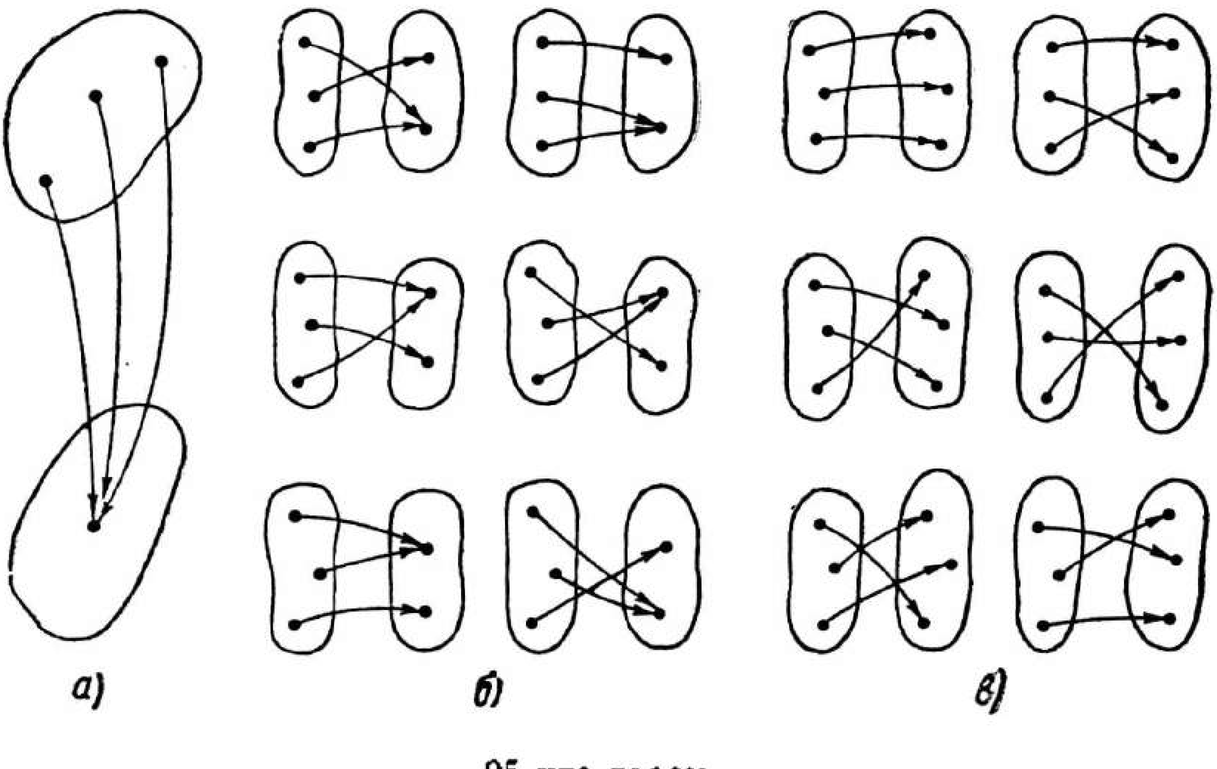
94 нче рәсем

телгән фикерләрне исбатлауга кайтып кала: күчү ярымъяссылыкны ярымъяссылыкка чагылдыра һәм күчү ике күплекнең кисешмәсен аларның образларының кисешмәсенә чагылдыра.

9. 2) Теләсә нинди боруда яссылык үзенә чагыла.

10. Бу мәсьәләләрне чишкәндә бору үзәге торышының төрле очракларын карарга кирәк. Әгәр бору почмагы 0° булган очракны карасак, бору үзәге ирекле рәвештә алына, чөнки бу вакытта без яссылыкның бердәй чагылдыруы белән эш итәбез.

Бору почмагы нульгә тигез булмаган очракта безне барыннан да элек бору үзәгенең торышы, ә аннары гына бору почмагының мөмкин саналган зурлыклары кызыксындырыр.



95 нче рәсем

а) 180°. б) 0°.

в) Кисемтә — уртасы тирәсендә 180° ка борганда.

г) Әйләнә — үзәге тирәсендә теләсә нинди почмакка борганда.

д) Өчпочмак — тигезьяклы булган очракта, аны медианаларының кисешү ноктасы тирәсендә 120° ка борганда.

е) Дүртпочмак — квадрат булган очракта, аны диагональләренең кисешү ноктасы тирәсендә ±90° ка һәм 180° ка борганда; дүртпочмак — параллелограмм булган очракта, аны диагональләренең кисешү ноктасы тирәсендә 180° ка борганда.

12. Әгәр турылар перпендикуляр булсалар, кисешү ноктасына карата 180° яки 90° ка борганда.

13. 0°, 60°, 120° һәм 180° ка бору белән.

14. Бирелгән әйләнәләрнең үзәкләрен тоташтыручы кисемтәгә урта перпендикулярның теләсә нинди ноктасы бору үзәге булырга мөмкин.

15. 0°, 72°, 144° ка бору белән.

16. Бирелгән әйләнәләрнең үзәкләрен тоташтыручы кисемтәгә урта перпендикуляр өстендә шундый нокталар төзегез, ул нокталардан бирелгән кисемтә 45° лы почмак белән күренсен.

17. AA_1 һәм BB_1 кисемтәләренә урта перпендикулярларның кисешү ноктасы. $[AA_1] \parallel [BB_1]$ һәм $(AA_1) \neq (BB_1)$ булганда, бору үзәкләре юк. $(AA_1) = (BB_1)$ булып, ә AA_1 һәм BB_1 кисемтәләренең үзәкләре тәңгәл килмәсә, шулай ук бору була алмый.

18. a һәм b турылары белән AB кисемтәсенә урта перпендикуляр арасында төзелгән почмакларның биссектрисаларының кисешү нокталары бору үзәкләре була. AB кисемтәсенә урта перпендикуляр биссектрисаларның берсе белән тәңгәл килсә, үзәкләрнең берсе A һәм B нокталары аша үтүче a һәм b турыларына перпендикулярларның кисешү ноктасы буларак табыла.

19. 17 нче мәсьәләне карагыз.

20. б) Яклары капма-каршы юнәлгән нурлар булсалар, ике конгруэнт почмак үзәк симметрияле була (96 нчы рәсем).

в) Барлык очракта да бу әйләнәләрнең үзәкләрен тоташтыручы кисемтәнең уртасы симметрия үзәге була (97 нче рәсем).

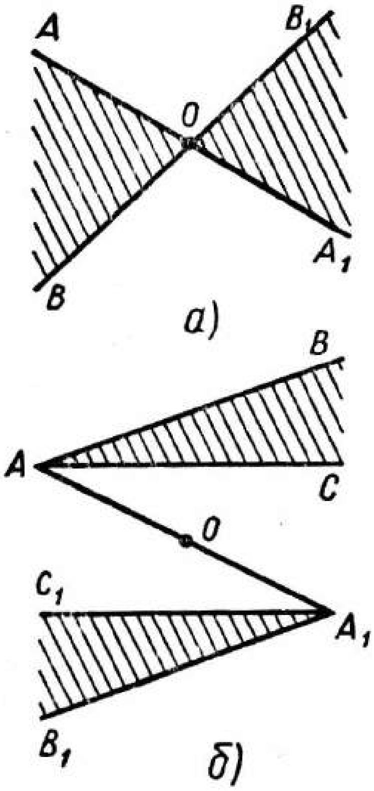
г) Әгәр бу өчпочмакларның яклары тиңдәшле рәвештә параллель булсалар (98 нче рәсем) һәм беренчесен икенчесенә күчерә торган параллель күчерү булмаса, ике конгруэнт өчпочмак үзәк симметрияле була.

21. 99 нчы рәсемне карагыз.

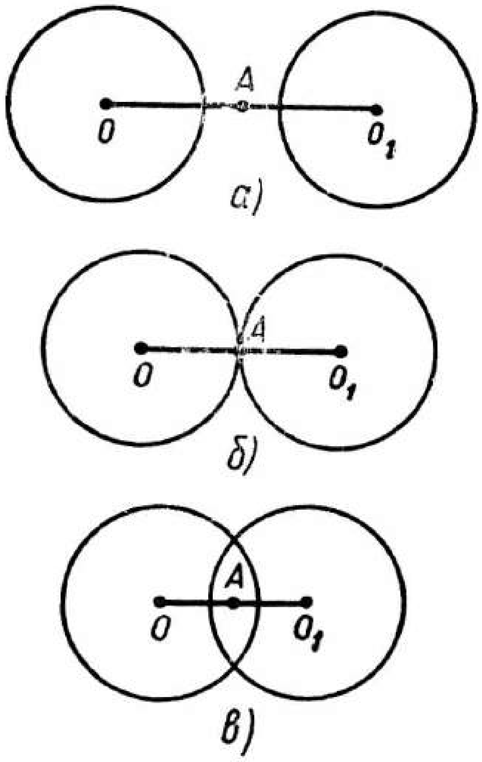
22. Үзәккә карата симметрияле кисемтәләрнең озынлыклары тигез һәм параллель булырга тиешләр.

23. Бирелгән әйләнә белән бирелгән ноктага карата аңа симметрияле әйләнәнең уртак хордасы эзләнелгән хорда була.

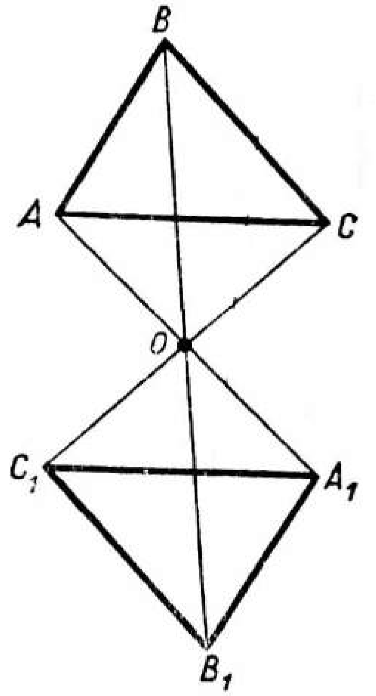
25. Параллелограмм диагональләренең кисешү ноктасы аның симметрия үзәге була. Бу ноктаны төзү өчен, ул нокта аша үтә торган турыларның параллелограмм якларына параллель булу һәм аның биеклеген конгруэнт кисемтәләргә бүлү үзлегеннән файдаланырга мөмкин.



96 нчы рәсем



97 нче рәсем



98 нче рәсем

27. Барыннан да элек, бу — симметрия күчәре һәм шулай ук симметрия күчәренә перпендикуляр турылар.

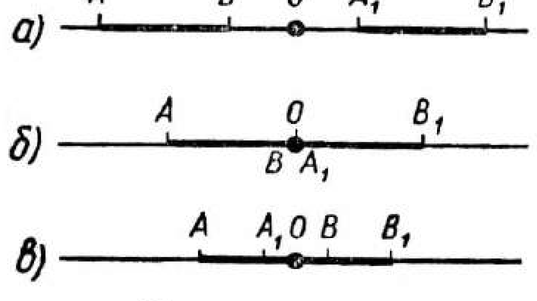
29. Күчәр симметриясе билгеләмәсен файдаланып, өчпочмак якларының конгруэнт икәнен исбат итегез.

30. Дельтоид, тигезьянлы трапеция — бер, турыпочмаклык, ромб — ике, квадрат — дүрт.

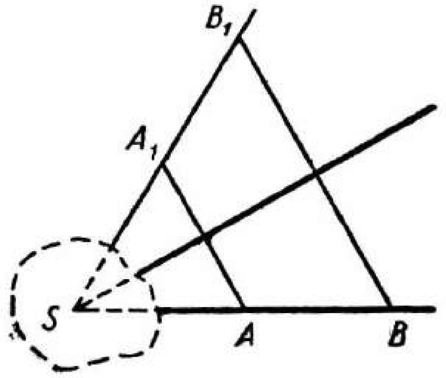
32. Бирелгән почмакның бер ягы өстендә A һәм B нокталары алабыз да, икенче ягына карата күчәр симметриясен кулланып, шул нокталарның образларын төзибез. Бу A_1 һәм B_1 нокталары булыр. B_1SB — эзләнелгән почмак (100 нче рәсем).

33. M ноктасы аша почмакның якларын кисә торган l турысы үткәрәбез. $D_1 = S_2(D)$ булсын. Ул вакытта $(MD_1) - l$ турысына карата симметриядә эзләнелгән турының образы (101 нче рәсем).

34. Теләсә нинди турыга карата бирелгән почмакларның образларын төзибез дә шул почмак түбәләренең образлары арасындагы ераклыкны табабыз.



99 нчы рәсем



100 нче рәсем

35. 102 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, сызым сызабыз. Почмаклар конгруэнт, чөнки күчәрле симметрия — күчү ул.

36. p турысына карата күчәр симметриясендә A ноктасының образы A_1 не төзибез (103 нче рәсем). A_1 һәм B нокталары аша p ны M ноктасында кисеп үтүче туры үткәрәбез. Туры өстендә икенче бер C ноктасы алып, аны A_1 һәм B нокталары белән тоташтырабыз. BA_1C өчпочмагы килеп чыга.

$$|AC| - |BC| = |A_1C| - |BC| \leqslant |A_1B|.$$

Әгәр A_1, B һәм C нокталары бер туры өстендә, ягъни (A_1C) өстендә ятсалар, эзләнелгән аерма максималь кыйммәтенә ия була.

$$|BB_1| \neq |A_1C_1|$$

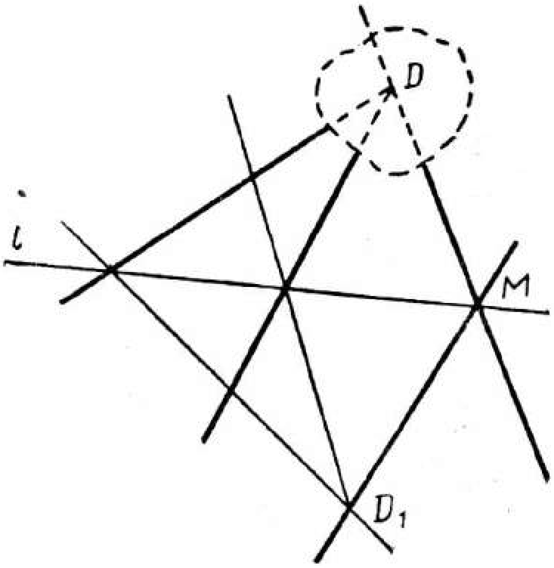
шарты үтәлгәндә, аерма бар һәм ул иң зур кыйммәте була, ә $|BB_1| = |A_1C_1|$ булса, аерма булмый.

37. AC кисемтәсенә урта перпендикуляр төзибез. Бу симметриянең беренче күчәре була да инде. B_1CD почмагының биссектрисасы — икенче симметрия күчәре (104 нче рәсем).

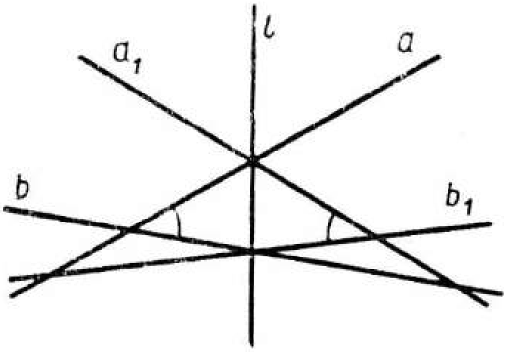
38. $|OM_1| = |OM_2|$. $|M_1M_2|$ — кисемтә (105 нче рәсем).

39. Бер пар белән.

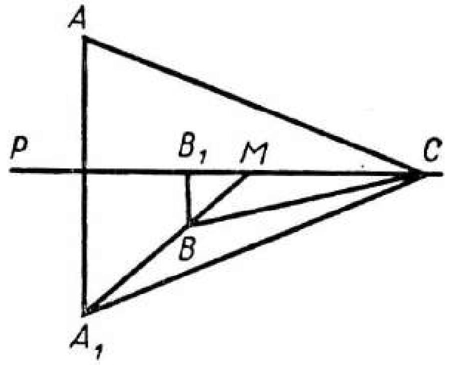
41. а) Бер түбәсен күчәр өстендә алырга, калган икесен күчәрдән читтә алып, аларга симметрияле нокталар төзергә. б) Ике симметрия күчәре булса, төзек бишпочмак була.



101 нче рәсем

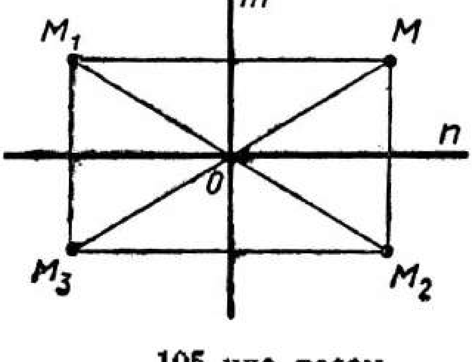


102 нче рәсем

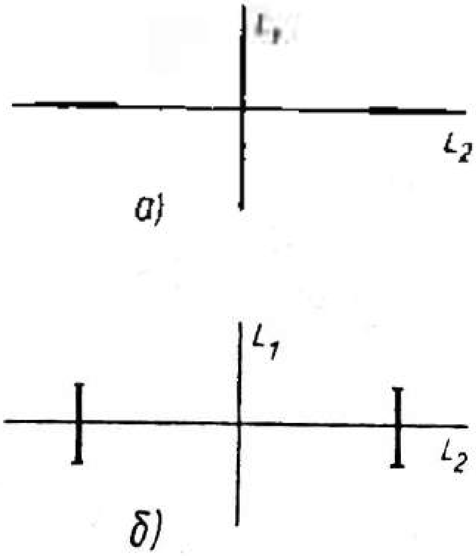


103 нче рәсем

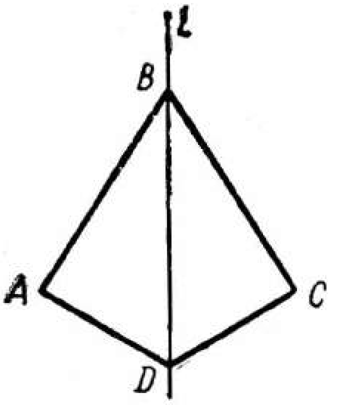
104 нче рәсем



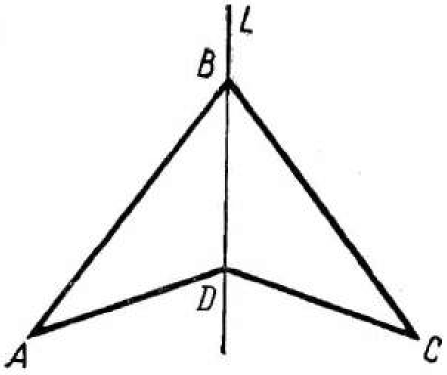
105 нче рәсем



106 нчы рәсем



107 нче рәсем



108 нче рәсем

42. Ике кисешүче туры арасындагы почмак биссектрисасына карата симметриядә. Ике параллель турыдан тигез ераклыктагы турыга карата симметриядә.

43. Бары тик ике симметрия күчәренең кисешү ноктасы гына ике симметриянеке дә булган кабатлы пар була.

44. Бер турыны икенчесенә чагылдыра торган күчәрле симметриядән файдаланыгыз.

45. Бирелгән якка каршы яткан почмак биссектрисасына карата кечерәк якны чагылдырыгыз.

46. Өченче якка үткәрелгән урта перпендикулярга карата симметрияне кулланганнан соң мәсьәлә ике ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча өчпочмак төзүгә кайтарып калдырыла.

47. Почмакның якларына карата M ноктасына симметрияле итеп, M_1 һәм M_2 нокталары төзегез. M_1M_2 турысы почмакның якларын A һәм B нокталарында кисеп үтә.

48. К у р с ә т м ә. Карала торган кисемтәләр бер туры өстендә яталар һәм уртак ноктага ия яки перпендикулярлар һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленәләр.

49. К у р с ә т м ә. Мөмкин булган очраклар 106 нчы рәсемдә күрсәтелгән.

50. а) Ике симметрия күчәре. б) Бер симметрия күчәре.

51. 107 нче рәсемне карагыз.

52. 108 нче рәсемне карагыз.

53. Туры әйләнә үзәге аша үтсә, ике симметрия күчәре. Калган очракларда — бер симметрия күчәре.

55. К у р с ә т м ә. Төзү $O_1 = S_l(O)$ ноктасын табуга кайтарып калдырыла.

56. 109 нчы рәсемне карагыз.

57. $[lX)$ ярымъяссылыгында $[AZ)$, $[AX]$, $[ZX]$ фигуралары ята.

58. К у р с ә т м ә л ә р. а) Эзләнелә торган әйләнәләрнең үзәкләре үзара перпендикуляр турылар белән төзелгән туры почмакларның биссектрисалары өстендә, турыларның кисешү ноктасыннан тигез ераклыкта яталар.

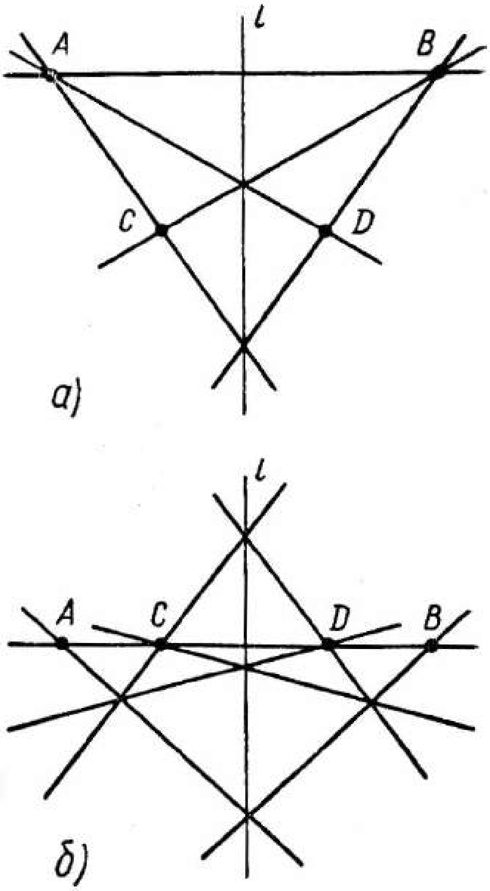
б) Фигура өч концентрик әйләнәнең берләшмәсеннән гыйбарәт.

в) Өч әйләнәнең үзәге — бер туры өстендә. Бу әйләнәләрнең кимендә икесе конгруэнт һәм аларның үзәкләре урта әйләнәнең үзәгеннән тигез ераклыкта урнашкан.

59. Чишелеше алдагы мәсьәләнеке кебек үк, ләкин турыларның кисешү ноктасыннан әйләнәләрнең үзәкләре ераклыгын әйләнә радиусыннан кечерәк итеп алырга.

60. Төзелгән өчпочмакларның уртак кисәге ике симметрия күчәрле дүртпочмак (110 нчы рәсем) яки квадрат килеп чыкса, дүрт симметрия күчәрле дүртпочмак була.

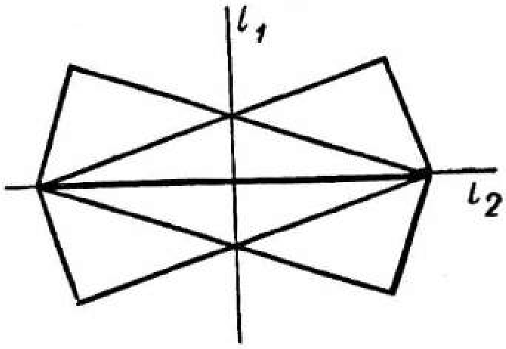
61. Каршы кую юлы белән исбатларга мөмкин. Әгәр бишпочмакның диагонале яткан l турысы аның симметрия күчәре булса, бу күчәр өстендә күппочмакның ике һәм бары тик ике генә түбәсе ята (чөнки бишпочмак кабарынкы). Калган өч түбәсе l чикле һәр ярымъяссылыкта тигез санда бүленеп урнашырга тиеш. Ләкин өч түбә өчен моны эшләү мөмкин түгел. Димәк, андый бишпочмак юк.



109 нчы рәсем

§ 3. Параллельлек һәм параллель күчерү

4. а) Әгәр $c < d$ булса, буш күплек; әгәр $c = d$ булса, бирелгән турылар арасындагы барлык полоса; әгәр $c > d$ булса, параллель турылар пары.



110 нчы рәсем

6. $ABCD$ — эзләнелә торган дүртпочмак булсын. B ноктасы аша, (CD) га параллель итеп, (AD) белән M ноктасында кисешкәнчегә кадәр туры үткәрегез. BM кисемтәсендә B түбәсеннән башлап $|BK| = c$ салыгыз. Хәзер дүртпочмакның әченче түбәсен табуы җиңел.

7. $[BC]$ нә урта перпендикуляр — сынык сызыкның симметрия күчәре.

8. Яссылыкта чиксез күп юнәлешләр бар.

9. а) Яссылыкта ике нокта ике юнәлеш бирә. б) Өч нокта гомуми очракта алты юнәлеш бирә, әмма бу нокталар бер туры өстендә ятсалар, алар ике юнәлешне генә ачыклыйлар. в) Дүрт нокта өчен гомуми очракта 12 юнәлеш барлыкка килә. Шулай да түбәндәге очраклар булуы мөмкин: 1) нокталар — трапеция түбәләре — 10 юнәлеш; 2) нокталар — параллелограмм түбәләре — 8 юнәлеш; 3) өч нокта бер туры өстендә һәм берсе аннан читтә урнашкан — 8 юнәлеш; 4) барлык нокталар бер туры өстендә урнашканнар — ике генә юнәлеш.

10. 4 нче рәсемнән $\widehat{MNP} + \widehat{NPQ} = (180° - 2\widehat{BNP}) + (180° - 2\widehat{BPN}) = 360° - 2(\widehat{BNP} + \widehat{BPN}) = 180°$ икәне күренә; димәк, $[NM] \parallel [PQ]$.

11*. Барлык очракларны караган вакытта өчпочмакның почмаклары суммасы турындагы теоремадан һәм өчпочмакның тышкы почмагы үзлегеннән файдаланабыз. Мәсәлән, а) очрагында

эзләнелә торган почмак $\alpha = 90° - \left(\hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}\right)$, ләкин $\frac{\hat{A}}{2} = \alpha + (90° - \hat{B})$.

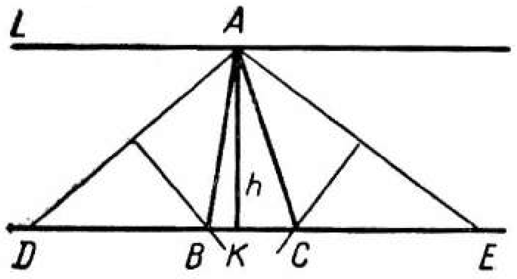
$\alpha = 90° - \hat{C} - \alpha - 90° + \hat{B}$, ягъни $\alpha = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$.

12. а) $90° + \frac{\alpha}{2}$, $90° + \frac{\beta}{2}$ һәм $180° - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

13. Юк. **14.** 8 һәм 24 см. **15.** 30°, 60°.

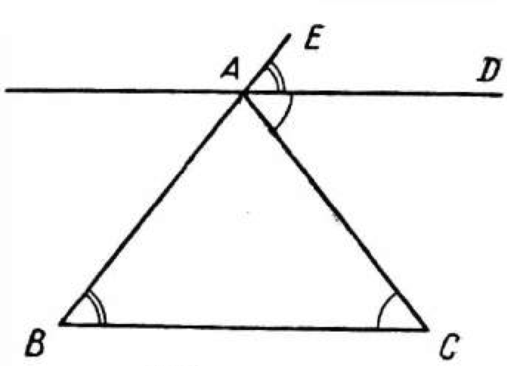
17. Әгәр $[DB] \cong [AB]$ һәм $[CE] \cong [AC]$ булса, ABD һәм ACE өчпочмаклары тигезьянлы (111 нче рәсем).

Төзү. Туры өстендә $|DE| = p$ салабыз. Әлеге турыдан h ераклыгында аңа параллель l турысы үткәрәбез. Түбәсе D ноктасында булган $\widehat{ADE} = \frac{\alpha}{2}$ почмагы төзибез, аның ягы l турысын A ноктасында — эзләнелә торган өчпочмак түбәсендә кисеп үтәр. B һәм C нокталары — AD һәм AE кисемтәләренең урталарыннан үткәрелгән перпендикулярларның DE турысы белән кисешү нокталары. ABC — эзләнелә торган өчпочмак.



111 нче рәсем

18. Юнәлешләр арасындагы почмаклар булганга, $\angle DAE \cong \angle B$, ә параллель турыларны өченче туры белән кистергәндә барлыкка килгән почмаклар булганга күрә, $\angle DAC \cong \angle C$. Тигезьяклы өчпочмакның нигезе янындагы почмаклары буларак B һәм C почмаклары конгруэнт, шуңа күрә $\widehat{DAE} = \widehat{DAC}$ (112 нче рәсем).

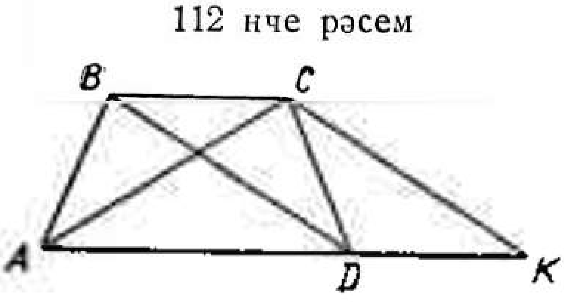


112 нче рәсем

21. а) 2. б) 6 яки 4. в) Түбәндәге очраклар булуы мөмкин: 1) 12; 2) 8; 3) 10; 4) 6.

22. Әйләнә үзенә конгруэнт әйләнәгә шул әйләнәләрнең үзәкләре белән бирелгән параллель күчерү ярдәмендә чагылдырыла. Кисемтәләр параллель һәм бер үк озынлыкта булган очракта гына кисемтәне кисемтәгә параллель күчерү ярдәмендә чагылдырып була.

23. Монда ике очракны аерырга кирәк: 1) теләсә нинди параллель күчерүдә; 2) нинди булса да конкрет параллель күчерүдә. 1) очрагында яссылык кына. 2) очрагында күбрәк



113 нче рәсем

мисал китерергә мөмкин: туры, әгәр күчерүнең юнәлеше бирелгән турыга параллель булса; ярымъяссылык, әгәр күчерүнең юнәлеше аның чигенә параллель булса; полоса, шул ук шартларда.

24. Почмакның эчендә алынган теләсә нинди нокта аша аның якларына параллель турылар үткәрәбез. Бу турылар арасындагы почмак бирелгән почмакка конгруэнт.

25. $\angle BDA \cong \angle CAD$ булуын исбат итегез, ул вакытта ABD һәм ACD өчпочмакларының конгруэнтлыгыннан $|AB| = |CD|$ тигезлеге килеп чыга (113 нче рәсем).

26. q турысының ирекле A_1 ноктасыннан бирелгән кисемтә озынлыгындагы радиус белән p турысында C_1 не тамгалыйбыз; тигезьяклы $A_1B_1C_1$ өчпочмагы төзибез (114 нче рәсем). B_1 ноктасы аша һәм p, q турыларына параллель итеп s турысы белән B ноктасында кисешүче туры үткәрәбез. $A_1B_1C_1$ өчпочмагын B_1B нуры юнәлешендә $|BB_1|$ ераклыгына күчерәбез.

28. M — BC ягы өстендәге теләсә нинди нокта булсын (115 нче рәсем). $[AC] \perp [MN]$ һәм $[MN] \parallel [BE]$, $[EB] \perp [MP]$ үткәрәбез. $|MN| = |EP|$, $\widehat{PMB} = \widehat{ACB}$, $\widehat{ACB} = \widehat{CBA}$ икәнен табабыз.

PMB өчпочмагы MFB өчпочмагына гипотенузасы һәм кысынкы почмагы буенча конгруэнт, димәк, $|PB| = |MF|$.

Шулай итеп, $|MN| + |MF| = |BE| = h_b$, ләкин $h_b = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}c$.

29. 116 нчы рәсемне карагыз. **31.** $a + b$.

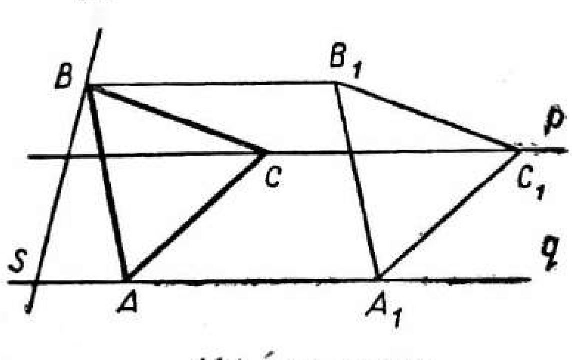
32. Өчпочмакның урта сызыгы үзлегеннән файдаланырга кирәк.

33. PF кисемтәсен AC турысына карата чагылдырыгыз (117 нче рәсем). $|PE| = |FP|$ һәм $[EP]$ белән $[PD]$ бер туры өстендә яталар. Моннан тыш, симметрия нигезендә $\widehat{AFP} = \widehat{AEP} = 90°$. Моннан мәсьәләнең алга таба чишелеше килеп чыга.

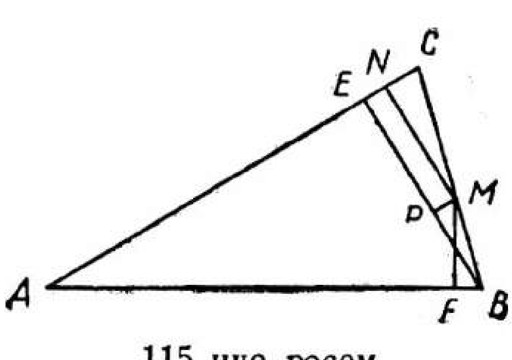
34. Күчерүләрнең юнәлеше капма-каршы һәм тиңдәш нокталар арасындагы ераклыклар бертөрле булганда.

35*. P, Q, R нокталары — ABC өчпочмагы якларының урталары булсын (118 нче рәсем). $[PQ]$ — ABC һәм MM_2M_3 өчпочмакларының урта сызыгы. $[RQ]$ — ABC һәм MM_1M_2 өчпочмакларының урта сызыгы. $[PR]$ — ABC һәм MM_1M_3 өчпочмакларының урта сызыгы.

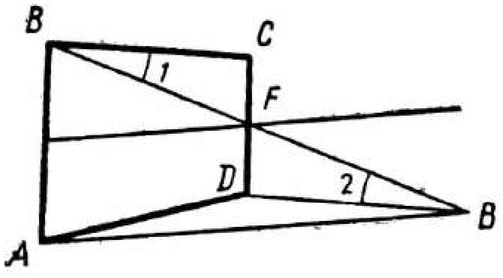
Моннан чыгып ABC һәм $M_1M_2M_3$ өчпочмаклары якларының конгруэнтлыгы җиңел исбат ителә.



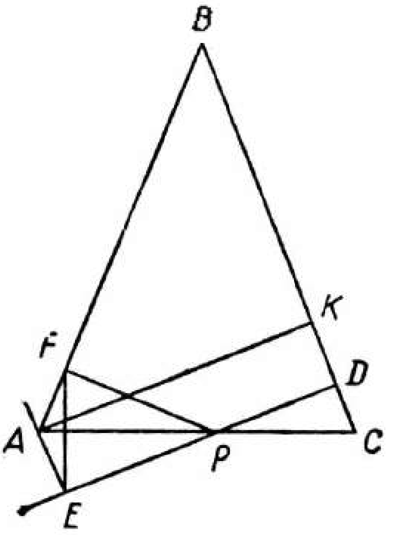
114 нче рәсем



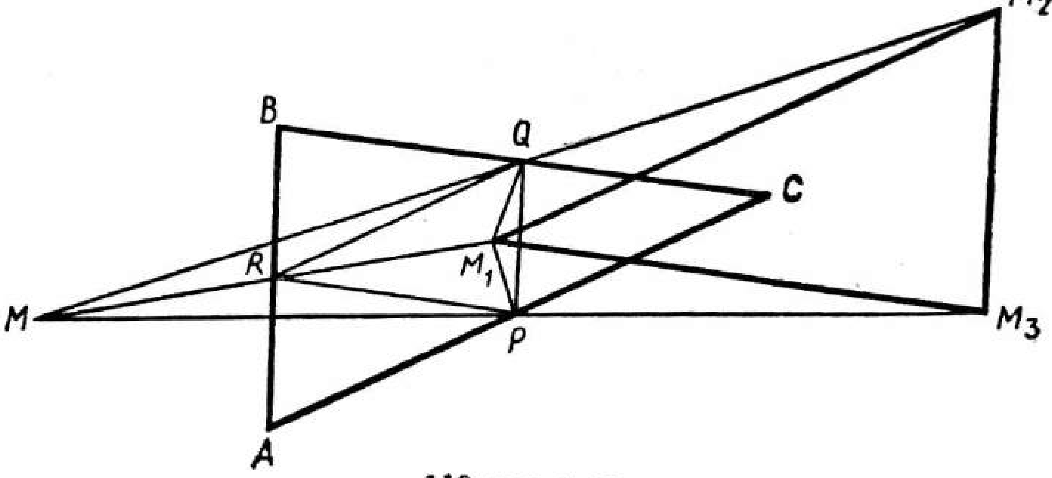
115 нче рәсем



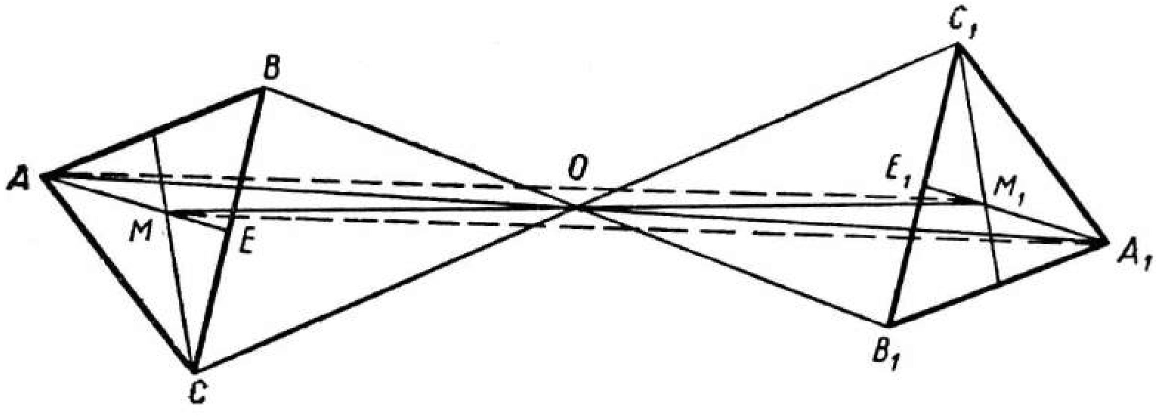
116 нчы рәсем



117 нче рәсем



118 нче рәсем



119 нчы рәсем

36*. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары симметрик булгач, бу өчпочмаклар конгруэнт (119 нчы рәсем). Аларның тиңдәш медианалары AE һәм A_1E_1 шулай ук симметрик һәм конгруэнтлар, шуңа күрә AM_1A_1M дүртпочмагы параллелограмм була, монда $[AA_1]$ һәм $[M_1M]$ — диагональләр, димәк, O ноктасы аларны урталай бүлә. Моннан M_1 һәм M нокталарының O үзәгенә карата үзәк симметрияле икәне килеп чыга.

II бүлек. КҮППОЧМАКЛАР

§ 1. КҮППОЧМАК БИЛГЕЛӘМӘСЕ

1. *D* һәм *K* нокталары б) һәм в) очракларында бер өлкәнеке; *E* һәм *T* нокталары а) очрагында бер өлкәнеке.

3. 1) а) 1; б) 2; в) 3; г) $n-3$.

2) а) 2; б) 5; в) 9; г) $\frac{(n-3)n}{2}$.

4. Почмак һәм дүртпочмак кабарынкы һәм кабарынкы булмаган фигура да булырга мөмкин (120 нче рәсем); нур, кисемтә, ярымъяссылык, яссылык, өчпочмак — һәрвакыт кабарынкы фигуралар.

5. а) 11 өчпочмак: *a*, *c*, *d*, *e f*, *af*, *fe*, *ed*, *dc*, *be*, *fed*.

б) *ABK* һәм *KLM* — тигезьянлы өчпочмаклар, *ABLM*—квадрат, *ABCD* һәм *LCDM* — турыпочмаклыклар, *BCDMK* һәм *ADCLK* — бишпочмаклар, *ABCDMK* һәм *BADCLK* — алтыпочмаклар һ. б.

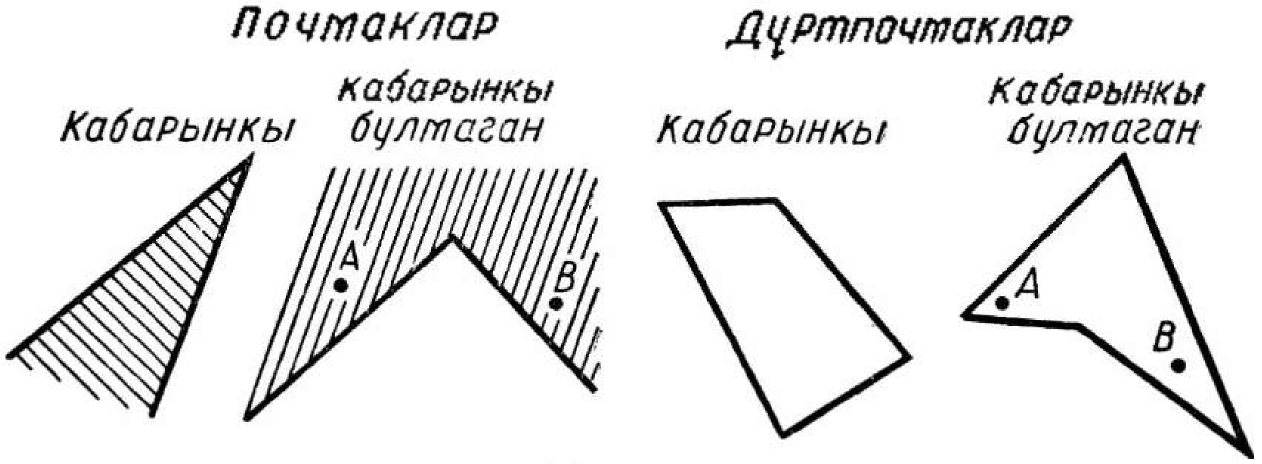
6. 1) а) *ABCD* дүртпочмагы; б) *ACDE* дүртпочмагы; в, г) *ABCDE* бишпочмагы. 2) а) *AC* кисемтәсе; б) *A* ноктасы; в, г) *ACD* өчпочмагы; д) *C* ноктасы.

7. а) 3; б) $n-2$.

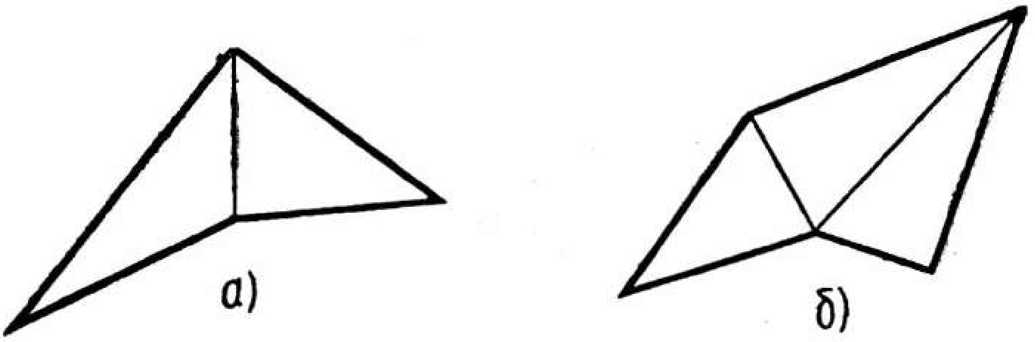
9. Күрсәтмә. Бирелгән күппочмакны өчпочмакларга бүлгәләгез (121 нче рәсем): а) $4d$ яки 360°; б) $6d$ яки 540°.

10. а) 130°; б) $\widehat{M}=\widehat{P}=30°$, $\widehat{Q}=120°$.

11. Күрсәтмә. Башта бу тышкы почмакның 90° ка тигез икәнлеген исбатлагыз.



120 нче рәсем



121 нче рәсем

Чишү. Тигезләмә төзибез. $180°(n-2)=2250°-x$, монда x — бирелгән тышкы почмакның зурлыгы. Моннан $18n=261°-0{,}1x$, $x=90°$ һәм $n=14$.

12. 5.

13. 1) а) Юк, алай булмаганда бу өчпочмакның ике эчке почмагының суммасы 180° ка тигез булыр иде, бу мөмкин түгел; б) әйе, турыпочмаклы өчпочмакта аның ике биеклеге үзара перпендикуляр. 2) 1) мәсьәләсенең җавабын карагыз.

14. Кабарынкы күппочмакның тышкы почмаклары суммасы $4d$ га тигез. Әгәр күппочмакның эчке почмагы кысынкы булса, аңа тиңдәш тышкы почмагы җәенке була. Димәк, күппочмакның өчтән артык кысынкы почмагы була алмый.

17. $\hat{B}=\hat{D}=154°$, $\hat{C}=26°$.

§ 2. ӨЧПОЧМАКЛАР

2. а) $\angle A$ һәм $\angle B$; б) $\angle A$; в) андый өчпочмак булмый.

3. а) c; б) b; в) a.

4. а) b, c, a; б) иң зур ягы c, $a=b$.

5. a, b, c.

6. а) $|AB|>|AC|$; б) $\angle A, \angle B, \angle C$.

7. а) $a+c$; б) $\widehat{ACB}=\widehat{ABC}=70°$, димәк, ABC өчпочмагы тигезьянлы.

§ 3. ДҮРТПОЧМАКЛАР

1 һәм **2.** Күрсәтмә. Үзәк симметрияле кисемтәләрнең үзлеген файдаланыгыз.

3. Күрсәтмә. Бу дүртпочмакның капма-каршы яклары парпар параллель икәнен исбат итегез.

4. а) Почмаклары бирелгән параллелограммның почмакларына конгруэнт булган параллелограммнар (аерым очракта, бирелгән параллелограмм турыпочмаклык булганда, төзелгән параллелограмм ноктага әверелгәндә).

б) Күрсәтмә. Үзәк симметрияле кисемтәләрнең үзлеген яки 2 нче мәсьәләнең нәтиҗәсен файдаланыгыз.

6. 10 см. **7.** $\frac{P-2a}{2}$. **8.** 30 см; 80 см.

9. а) 16 см; 44 см; б) ике чишелеше бар: 3 см; 32 см яки 23 см; 72 см.

10. 50° һәм 130°. **11.** 85° һәм 95°.

12. $2(2a+b)$ яки $2(2b+a)$.

13. O ноктасына карата үзәкле симметрия (O ноктасына карата 180° ка бору).

14. а) Күрсәтмә. $ABCD$ дүртпочмагының параллелограмм булуын һәм K ноктасы аның симметрия үзәге икәнен исбатлагыз.

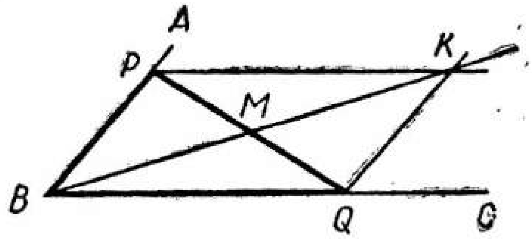
15. а) 8 см; б) 45° һәм 90°. **16.** $0{,}5a$.

17. а) 25°, 155°; б) 55°, 125°.

22*. Күрсәтмә. Капма-каршы ике пар түбәсенең параллелограмм түбәләре булуын исбат итегез.

23. Параллелограммның берәр билгесен файдаланыгыз,

24. Башта теләсә нинди дүртпочмакта якларының урталары параллелограмм түбәләре булуын исбат итегез.



122 нче рәсем

25. Бирелгән ABC почмагының B түбәсе һәм бирелгән M ноктасы аша нур үткәрәбез һәм аның өстендә M ноктасыннан башлап MK кисемтәсе салабыз. $|MK|=|BM|$. K ноктасы аша почмакның якларына параллель итеп турылар үткәрәбез. $P\in[BA)$, $Q\in[BC)$. PQ эзләнелгән кисемтә була (122 нче рәсем).

26. Күрсәтелгән ераклыкларның суммасы параллелограммның биеклекләре суммасына тигез.

28. Күрсәтмә. $\hat{1}=\hat{2}=\hat{3}=\hat{4}$ икәнен исбат итегез (123 нче рәсем).

31. а) һәм б); б) һәм в); в) һәм г); а) һәм г).

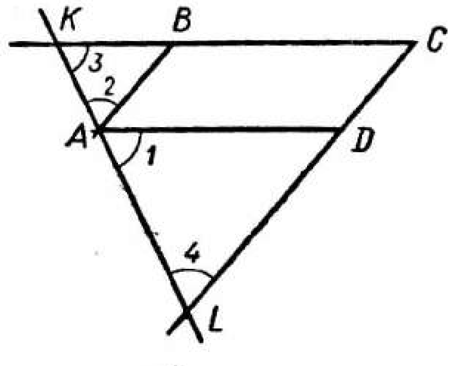
32. а) Әйе; б), е) әйе, чөнки турыпочмаклык — параллелограммның аерым бер төре ул; в), д) әйе, чөнки ромб — параллелограммның аерым бер төре ул; г) әйе; ж) әйе, чөнки квадрат — параллелограммның аерым бер төре ул.

38. а) DC кисемтәсенә; б) түбәләре бирелгән турыпочмаклыкның яклары өстендә һәм диагонале OD булган турыпочмаклыкка (O түбәсеннән тыш); в) AC диагоналенә; г), д), е). үзенә.

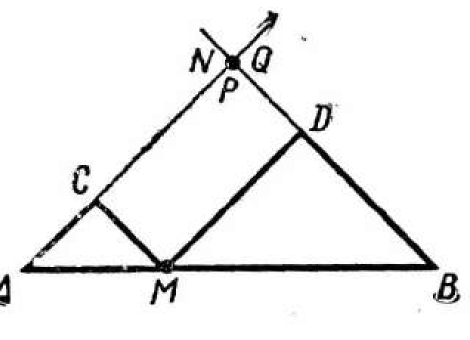
39. Күрсәтмә. Диагональләре үзара перпендикуляр булган дүртпочмак якларының урталары турыпочмаклыкның түбәләре икәнен күрсәтегез.

40. а) C түбәләре күплеге — A һәм Q нокталарыннан башка AQ кисемтәсе ул, $\widehat{QAB}=45°$, $|AQ|=\frac{|AB|\sqrt{2}}{2}$; D түбәләре күплеге — B һәм N нокталарыннан тыш BN кисемтәсе ул, $\widehat{DBA}=45°$; $|BN|=\frac{AB\sqrt{2}}{2}$ (124 нче рәсем).

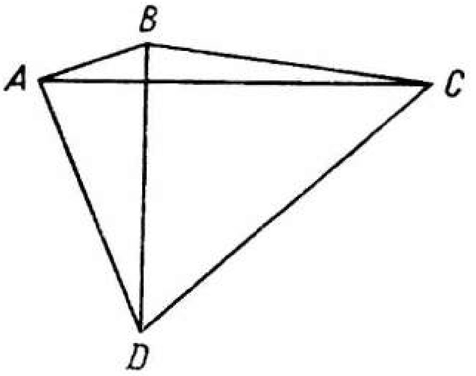
б) AQ һәм BN кисемтәләренең Q һәм N нокталары тәңгәл киләләр. Бу уртак ноктаны P аша тамгалыйк.



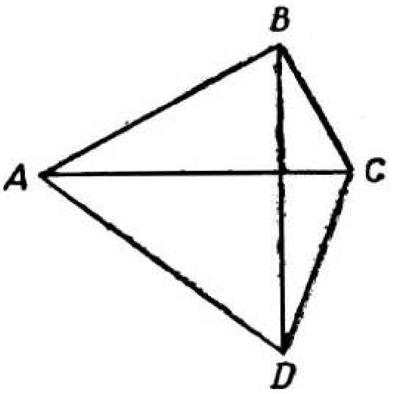
123 нче рәсем



124 нче рәсем



125 нче рәсем



126 нчы рәсем

C, *P*, *D* һәм *M* нокталары — турыпочмаклыкның түбәләре, ә турыпочмаклыкның диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленәләр, шуңа күрә *MP* кисемтәсе *CD* кисемтәсен урталай бүлә.

в) *AL* кисемтәсе, монда *L* — *AB* кисемтәсенең уртасы. (Әгәр *A* ноктасын нуль радиуслы әйләнә дип исәпләсәк.)

42. а) 125 нче рәсемне карагыз; б) 126 нчы рәсемне карагыз.

45. Әгәр бирелгән нокталар бер туры өстендә ятмасалар, мәсьәләнең өч чишелеше була (127 нче рәсем).

Әгәр бирелгән *A*, *B* һәм *C* нокталары бер туры өстендә ятсалар, бу нокталарның берсе, мәсәлән, $B \in [AC]$ ноктасы *AC* кисемтәсен урталай бүлгән очракта, мәсьәләнең чишелеше була. Калган очракларда мәсьәләнең чишелеше юк.

48. 80° һәм 100°. **49.** 60° һәм 120°. **50.** 30° һәм 150°.

51. Бу ромбларның симметрия күчәрләре тәңгәл киләләр.

52. 4 см. **53.** Квадрат.

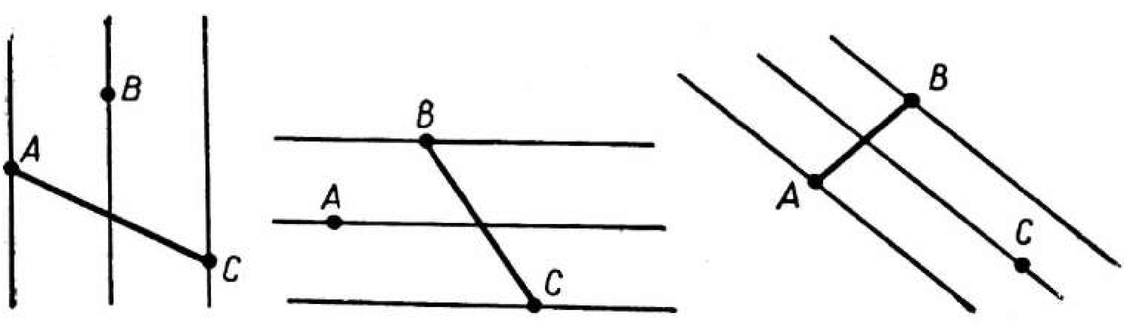
54. Бирелгән дүртпочмакның диагональләре а) үзара перпендикуляр; б) конгруэнт; в) үзара перпендикуляр һәм конгруэнт булырга тиешләр.

55. а) *BD* турысына карата симметрия яки квадратның симметрия үзәге тирәсендә сәгать йөреше уңаена 90° ка бору.

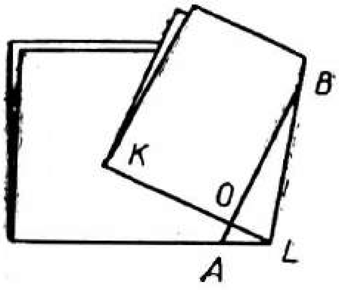
б) *AC* турысына карата симметрия, квадратның симметрия үзәге тирәсендә сәгать йөреше уңаена 90° ка бору.

56. Өчпочмак: а) *BAD*; б) *DCB*; в) *CDA*.

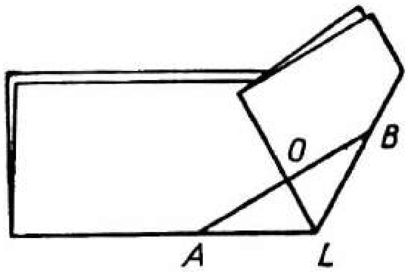
57. 1) Ромб; *AB* кисемтәсе бөкләү сызыклары белән 45° лы почмаклар төзергә тиеш. 2) а) $[AB] \perp [KL]$ (128 нче рәсем);



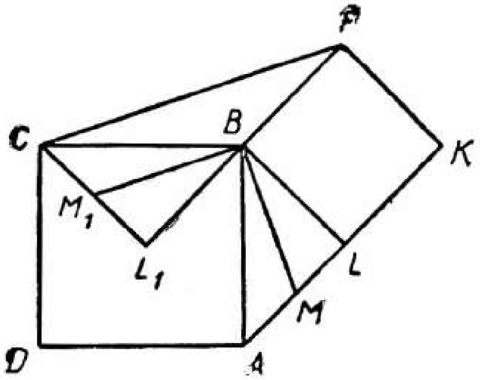
127 нче рәсем



128 нче рәсем



129 нчы рәсем

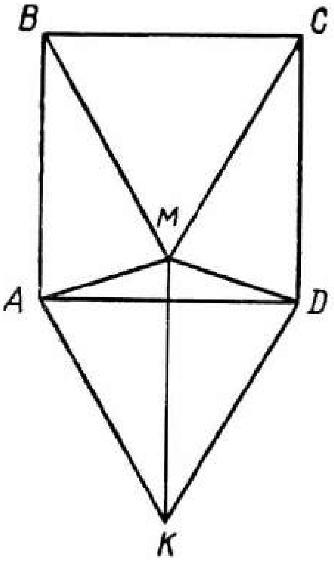


130 нчы рәсем

б) $|OB|=|OA|$, $[AB]\perp[OL]$ шарты үтәлергә тиеш (129 нчы рәсем).

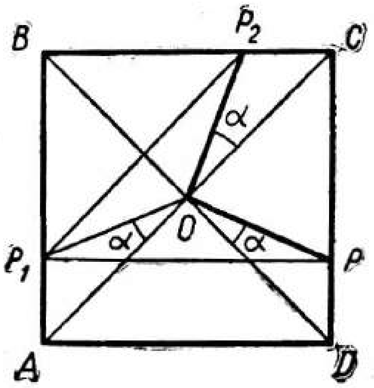
63. ABL өчпочмагын сәгать йөрешенә каршы B ноктасына карата 90° ка борабыз. $\widehat{ABC}=\widehat{LBL_1}=90°$, шуңа күрә L_1F туры кисемтәсе була (130 нчы рәсем). CFL_1 өчпочмагында $|CM_1|=|M_1L_1|$ һәм $|L_1B|=|BF|$; шулай булгач, $[M_1B]$ — аның урта сызыгы һәм $[M_1B]\parallel[CF]$, моннан $[BM]\perp[CF]$.

64. AD ягы өстендә тигезьяклы ADK өчпочмагы төзибез (131 нче рәсем), MK кисемтәсе үткәрәбез һәм AMK өчпочмагын карыйбыз — ул тигезьянлы, чөнки $\widehat{KAM}=\widehat{KMA}=75°$ (M һәм K ноктталары төзелгән фигураның симметрия күчәрендә ятуына игътибар итәбез). Моннан $|AB|=|AK|$ булган $ABMK$ дүртпочмагының параллелограмм икәнлеге килеп чыга. Димәк, $|BM|=|AB|=|BC|=|CM|$, шуны исбатларга кирәк иде дә.



131 нче рәсем

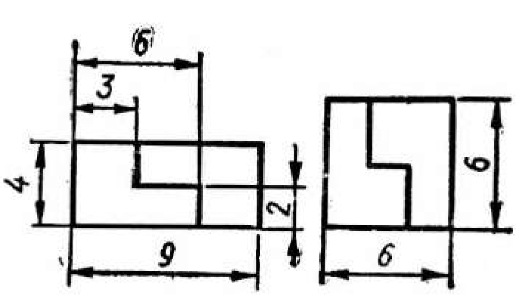
65. Күрсәтмә. POD почмагының зурлыгын α дип тамгалыйк, ул вакытта $\widehat{P_1OA}=\widehat{P_2OC}=\alpha$ (132 нче рәсем).



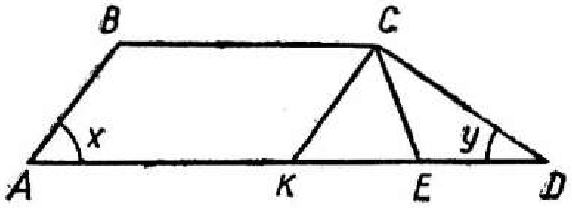
132 нче рәсем

Әлеге мәсьәлә тагы да гомумирәк мәсьәләнең аерым очрагы булып тора: „Яссылык өстендә координаталар башлангычы — O ноктасында һәм P — яссылыкның ниндидер ноктасы булган Декарт координаталар системасы бирелсен. $P_1=S_y(P)$, $P_2=S_{y=x}(P)$ булсын ди. $\widehat{P_2OP}=90°$ икәнлеген исбатлагыз“.

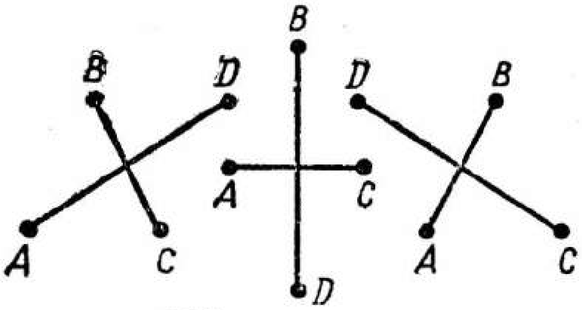
66. 133 нче рәсемне карагыз.



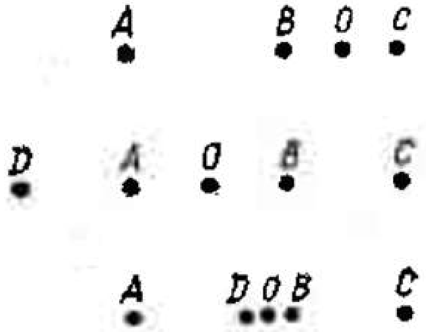
133 нче рәсем



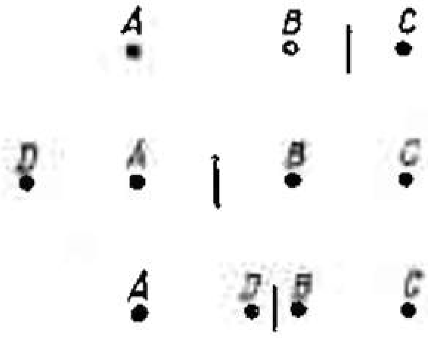
134 нче рәсем



135 нче рәсем



136 нчы рәсем



137 нче рәсем

67. 1) а) Юк; б) әйе. 2) 112° һәм 106°.

68. 40°, 140°, 80°, 100°.

69. 20 см. **70.** 10 һәм 34 см.

71. 132 см. **73.** 60°, 120°.

74. 11,5 см. **75.** 42 см.

76. 28 см.

77. $\frac{a-b}{2}$. Эзләнелә торган кисемтәнең озынлыгы KCD турыпочмаклы өчпочмагының медианасы озынлыгына тигез, $\widehat{KCD} = 90°$ (134 нче рәсем).

78. 50 см.

82. Чын әйтелмәләр: б), д), е), ж), и); ялган әйтелмәләр: а), в), г), з).

83. Чын әйтелмәләр: б), г), д).

85. а) $n = 2k$, монда $k \in N$ һәм $k > 1$; в) $n = 4$; г) $n > 4$; д), е) $n = 3$.

86. 1) Бирелгән A, B, C нокталары бер туры өстендә ятмыйлар. Ул вакытта, симметрия үзәге булган фигура төзү өчен, дүртенче нокта параллелограммның дүртенче түбәсе булырга тиеш. Мәсьәләнең өч чишелеше бар (135 нче рәсем). Симметрия күчәре булган фигураны бирелгән өч нокта буенча төзергә мөмкин (дельтоид).

2) Бирелгән A, B һәм C нокталары бер туры өстендә яталар (136 һәм 137 нче рәсемнәр).

§ 4. КУППОЧМАКЛАРНЫҢ МӘЙДАНЫ

1. а) 87 см^2; б) 204 см^2; в) 5,6 м^2.

2. а) 18 см; б) 4 м; в) 4 км; г) 320 м.

3. 1) а) 25000 м^2; б) 0,025 км^2; в) 2,5 га.

2) а) 0,24 км^2; б) 240 000 м^2; в) 2400 а.

3) а) 0,35 км^2; б) 3500 а; в) 35 га.

4. а) 20,8 км; б) 8 км. **6.** а) 4 м һәм 9 м; б) $\approx 50,9$ см.

7. а) 21 %; б) 19%. **8.** 20 см, 22 см. **9.** 124 см.

11. а) $ab - (a - 2d)(b - 2c)$;

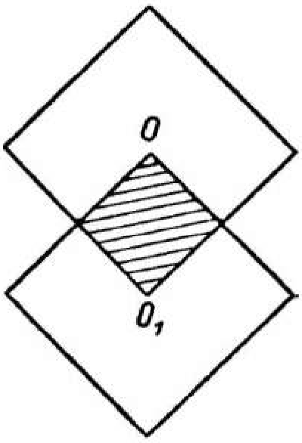
б) $ab - (a - c)(b - d)$;

в) $ab - (a - 2c)d$.

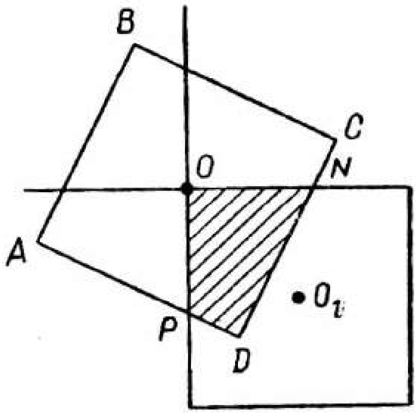
12. а) 40 мм; б) 10 мм.

14. 1) а) 6,25 см^2; б) 0,0441 м^2.

2) б) $\approx 8,76$ м; в) $\approx 3,82$ мм. 3) $\approx 6,32$ м.



138 нче рәсем



139 нчы рәсем

15. а) $0{,}25a^2$ (138 нче рәсем). б) ON һәм OP турыларының $ABCD$ квадратын (139 нчы рәсем) 4 конгруэнт дүртпочмакка бүлгәнен күрсәтү кыен түгел (O ноктасы — квадратның симметрия үзәге булуын файдаланыгыз). Димәк, $S_{ONDP} = 0{,}25a^2$.

16. 1) а), д), ж). 2) б), в), е), и).

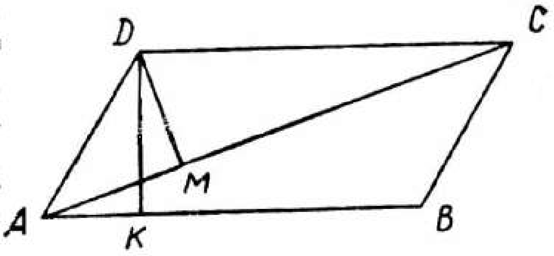
17. а) 12 см^2; б) 50 см^2.

18. а) 30°. б) Турыпочмаклык, чөнки аның биеклеге параллелограмм биеклегенә караганда зуррак (бер үк нигез булганда).

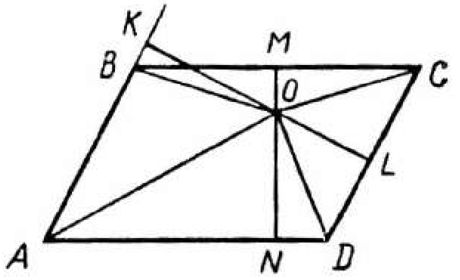
20. а) 4 см. б) 8,2 см һәм 4,1 см.

21. а) $\approx 3{,}33$ см яки 7,5 см. б) 3,75 см яки $\approx 6{,}67$ см.

23. Чишү: $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ADC} = |AC| \cdot |DM| = 64$ см^2 (140 нчы рәсем), $S_{ABCD} = |AB| \cdot |DK|$ булганга күрә, $|DK| = \frac{64}{12} \approx 5{,}33$ см.



140 нчы рәсем



141 нче рәсем

24. 1) а), г), д). 2) б), з).

25. а), б), в) әйе.

26. а) 14 см^2; б) 210 дм^2.

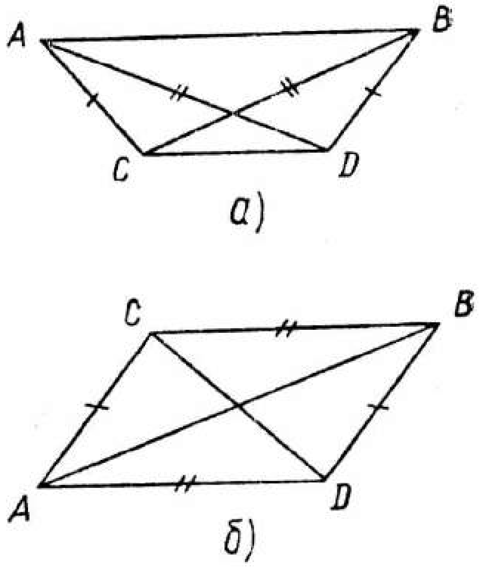
27. а) 6 бер^2; б) $\approx 1{,}78$; в) 2,4 бер.

28. 3 см.

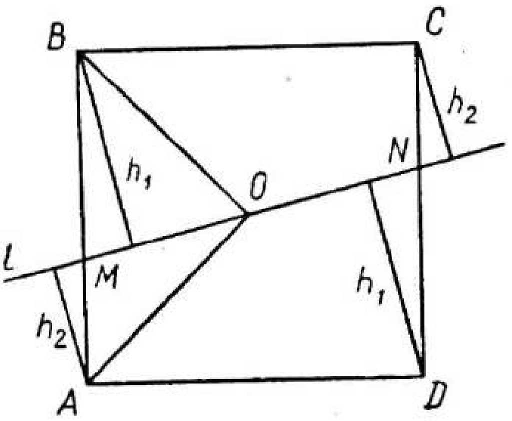
29. 3 : 1.

30. а) 4,8 см. б) 2 см. в) Мәсьәләнең чиксез күп чишелеше бар, чөнки бирелгән нигез һәм биеклек буенча теләсә никадәр өчпочмак төзергә мөмкин.

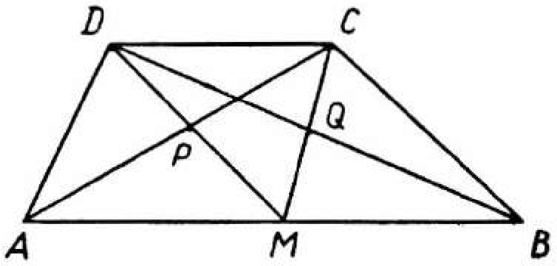
32. 2) а), б) әйе; в) юк.



142 нче рәсем



143 нче рәсем



144 нче рәсем

33. 1) а) 2080 мм^2; б) 1190 мм^2. 3) 26 мм.

34. 5 см, 12 см^2. Турыпочмаклыкның якларын a һәм b, ә диагонален d дип тамгалап, өч билгесезле өч тигезләмә системасын табабыз:

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ a^2 + b^2 = d^2, \\ ab = 2{,}4\,d. \end{cases}$$

35. ADC һәм BDC; ABD һәм ABC; ADO һәм OCB — теләсә нинди трапециядә.

36. 1 белән 2 һәм 3 белән 4 өчпочмаклары тигез зурлыкта, ә $S_{1+2} = S_{3+4}$ булганга, $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

37. а) 1 : 1; б) 3 : 2; в) 3 : 5; г) 1 : 4; д) 4 : 5.

К ү р с ә т м ә. $S_{DLC} = S_{DLK} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$ булу фактын файдаланыгыз.

40. а) $S_{ABO} + S_{CDO} = 0{,}5\,|AB| \cdot |OK| + 0{,}5\,|CD| \cdot |OL| = 0{,}5\,|AB| \times \times |KL| = 0{,}5\,S_{ABCD}$ (141 нче рәсем). Димәк, $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO}$ була.

41. а) ABC һәм BAD өчпочмаклары конгруэнтлар (142 нче рәсем), чөнки тиңдәшле рәвештә конгруэнт булган өчәр яклары бар, ә конгруэнт өчпочмакларда тиңдәш конгруэнт якларга каршы конгруэнт почмаклар ятканга күрә, $\angle BAD \cong \angle ABC$ була.

б) К ү р с ә т м ә. Башта ACD һәм BDC өчпочмакларының конгруэнтлыгын исбатлагыз.

45. Эзләнелә торган сумманы S аша тамгалыйк, ул вакытта фигураның (143 нче рәсем) үзәк симметрияле булу үзлегеннән: $s = 2(h_1 + h_2)$; $S_{AOB} = 0{,}25\,a^2$.

$$S_{AOB} = 0{,}5\,|MO| \cdot (h_1 + h_2) = 0{,}25\,b\,(h_1 + h_2).$$

Моннан $0{,}25\,a^2 = 0{,}25\,b\,(h_1 + h_2)$ һәм $s = \frac{2a^2}{b}$.

47. а) 976,5 мм^2; б) 1100 мм^2.

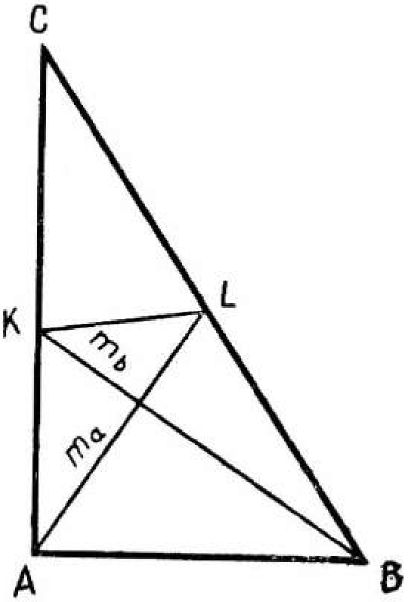
48. а) 126 мм; б) 75 мм.

50. Башта ADM белән MCB өчпочмагының (144 нче рәсем) тигез зурлыкта икәнен, аннары APM белән MQB һәм ADP белән BCQ өчпочмакларының тигез зурлыкта икәнен исбат итегез.

51. $\frac{a^2\sqrt{19}}{20}\approx 0{,}22a^2$.

52. $[AL]$ һәм $[BK]$ ABC өчпочмагының медианалары булсын (145 нче рәсем). $[AL]\perp[BK]$. KL кисемтәсен үткәрәбез. Аннары $S_{KLC}=0{,}25\,S_{ABC}$, ягъни $S_{KLBA}=0{,}75\,S_{ABC}$ һәм $S_{KLBA}=\frac{m_a\cdot m_b}{2}$ булуын күрсәтүе кыен түгел, моннан

$$S_{ABC}=\frac{4}{3}\cdot\frac{m_a\cdot m_b}{2}=\frac{2}{3}\,m_a\cdot m_b.$$



145 нче рәсем

53. $|AB|=|BC|$ булганлыктан, M ноктасы AB һәм BC якларыннан тигез ераклыкта. ABC өчпочмагының BD биссектрисасы B ноктасыннан башка шундый нокталарның геометрик урыны була.

55. а) 10 бер^2; б) 5 бер^2; в) 12 бер^2; г) 4 бер^2.

56. $1{,}875\sqrt{2}\approx 2{,}64$ см^2.

58. $\approx 4{,}6$ см.

59. $7{,}68\ a^2$.

61. 12 см^2. Башта, бирелгән дүртпочмак якларының урталары — мәйданы бу дүртпочмакның мәйданыннан ике тапкыр кечерәк булган параллелограммның түбәләре булуын исбат итегез.

63. $\approx 14{,}6$ см^2.

64. Күрсәтмә. KOL белән KON һәм LOM белән NOM өчпочмакларының пар-пар тигез зурлыкта булуын исбат итегез,

$$O=[KM]\cap[LN].$$

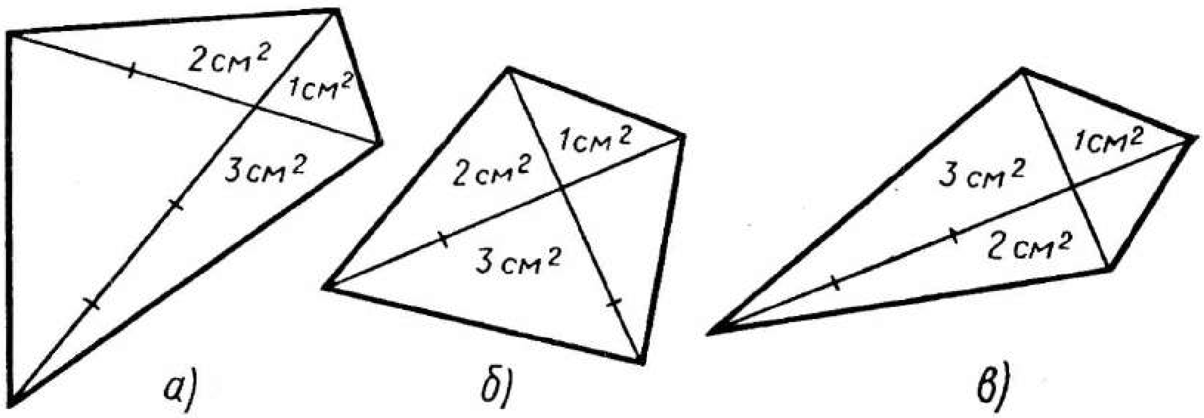
65. 1) а) 6 см^2 (146 нчы рәсем); б) 1,5 см^2; в) $\frac{2}{3}$ см^2.

2) 10 бер^2, 15 бер^2, 12 бер^2, 8 бер^2.

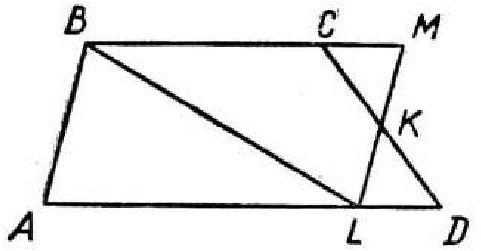
66. а) $\frac{x^2}{2}$; б) $4{,}5+3(x-3)=3x-4{,}5$;

в) $16-0{,}5(8-x)^2$; г) $24-0{,}5(10-x)^2$.

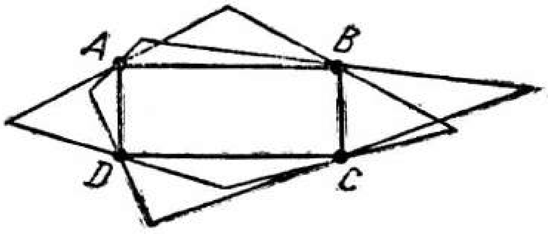
67. $18{,}25a^2\sqrt{3}\approx 31{,}6\,a^2$.



146 нчы рәсем



147 нче рәсем



148 нче рәсем

68. $0,5(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5})$ бер^2.

69. $\left(2+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)b^2$.

70. *ABCKL* бишпочмагын *ABML* параллелограммына тутырыгыз (147 нче рәсем), *KCM* һәм *KDL* өчпочмакларының конгруэнт икәнен исбатлагыз.

71. $a^2-2ab=a(a-2b)$, $b<0,5a$.

75. 2*S*. Яңа дүртпочмак — мәйданы бирелгән дүртпочмакның мәйданыннан ике тапкыр зуррак булган параллелограмм.

76. Һәр дүртпочмакның мәйданы шул дүртпочмак якларының урталары түбәләре булып хезмәт иткән параллелограммның икеләтелгән мәйданына тигез (148 нче рәсем).

77. К ү р с ә т м ә. Түбәләре — бирелгән трапеция якларының урталары булган дүртпочмакның турыпочмаклык икәнен исбат итегез.

78. а) 12 бер^2; б) 25 бер^2; в) 25 бер^2; г) 20 бер^2, *ABCD* дүртпочмагы — трапеция; д) 18 бер^2.

III бүлек. ӘЙЛӘНӘ ҺӘМ ТҮГӘРӘК

4. Шундый әйләнәнең үзәгеннән *M* ноктасына кадәр ераклык *a* га тигез. Димәк, әйләнә билгеләмәсе буенча, бирелгән *M* ноктасы аша үтүче *a* радиуслы барлык әйләнәләрнең үзәкләре күплеге үзәге *M* ноктасында булган *a* радиуслы әйләнә була.

5. Квадрат диагональләренең кисешү ноктасы аның түбәләреннән тигез ераклыкта. Шуңа күрә эзләнелә торган әйләнәнең үзәге квадрат диагональләренең кисешү ноктасында ята.

6. Бирелгән *MN* турысына бирелгән *A* ноктасында орынучы барлык әйләнәләрнең үзәкләре күплеге *MN* турысына *A* ноктасы аша үткәрелгән перпендикуляр була, *A* ноктасы бу күплеккә керми (без монда ноктаны „нульгә эверелгән әйләнә“ — нуль радиуслы әйләнә дип карамыйбыз).

7. Бирелгән турыга параллель һәм аннан *a* ераклыгында урнашкан ике туры.

8. *a* турысы (*O*, *r*) әйләнәсенә *M* ноктасында орынсын ди, [*AB*] — диаметр, [*AC*] һәм [*BD*] — диаметрның очлары аша орынмага үткәрелгән перпендикулярларның кисемтәләре. Ул вакытта [*OM*] — *ABDC* трапециясенең урта сызыгы.

9. Әйләнәнең үзәге бирелгән турыга бирелгән нокта аша үткәрелгән перпендикуляр өстендә ята, һәм бирелгән ноктадан бирелгән радиуска тигез ераклыкта урнашкан. Мәсьәләнең ике чишелеше бар — бирелгән турыга карата бер-берсенә симметрияле ике әйләнә.

10. Бирелгән почмак биссектрисасы белән әлеге почмакның ягы өстендә бирелгән нокта аша шул якка үткәрелгән перпендикулярның кисешү ноктасы эзләнелә торган әйләнәнең үзәге була.

11. a турысы һәм M ноктасы ($M \notin a$) бирелсен ди. a турысына параллель, M ноктасы кебек үк a чикле ярымъяссылыкта яткан һәм a турысыннан r ераклыгында урнашкан b турысының (M, r) әйләнәсе белән кисешү ноктасы эзләнелә торган әйләнәнең үзәге була. Мәсьәләнең ике, бер чишелеше булырга яки бер чишелеше дә булмаска мөмкин.

12. $|LB| = |MB| = x$, $|CL| = |CK| = r$, $|AK| = |AM| = y$ (149 нчы рәсем) булсын. Катетлар суммасы белән гипотенузаның аермасын исәплик.

$$x + r + r + y - x - y = 2r,$$

шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

13. 16 см^2.

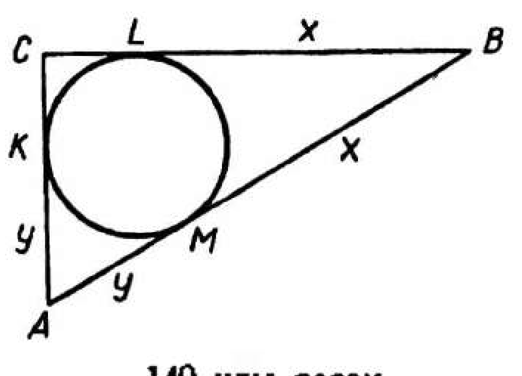
14. $KLMN$ дүртпочмагы — турыпочмаклык (ни өчен?). Шулай итеп, чишү өчен $|KL| = |KN|$ булуын исбат итәргә кирәк (150 нче рәсем). Бирелгән турыпочмаклы өчпочмакның катетларын һәм гипотенузасын тиңдәшле рәвештә a, b һәм c дип тамгалыйк. Ул вакытта

$$|KL| = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} = 0{,}5\,(a + b + c),$$

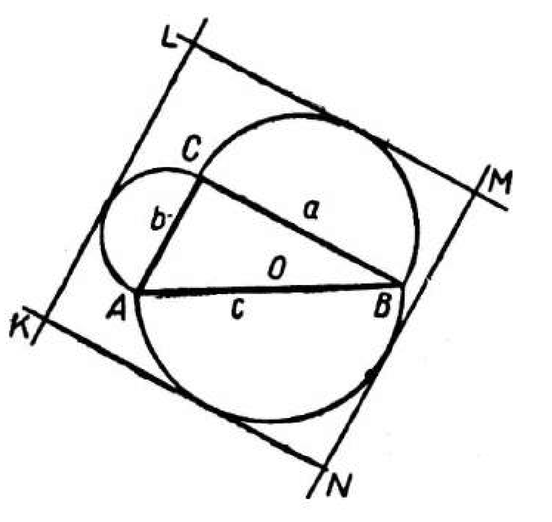
$$|KN| = |MN| = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = 0{,}5\,(a + b + c),$$

ягъни $|KL| = |KN|$ һәм $KLMN$ дүртпочмагы — квадрат.

15. AOB — туры почмак, a — бирелгән кисемтәнең озынлыгы булсын. Ул вакытта $\left(O; \frac{a}{2}\right)$ әйләнәсенең бирелгән почмакка караган дугасы, ягъни чирек әйләнә эзләнелә торган фигура була.



149 нчы рәсем



150 нче рәсем

16. 8 см. Күрсәтмә. Бирелгән хордаларны AB һәм AC дип тамгалыйк. Ул вакытта 41 нче теорема буенча BC кисемтәсе бирелгән әйләнәнең диаметры булыр. Әйләнәнең үзәге аша AB хордасына үткәрелгән перпендикуляр кисемтәсе ABC өчпочмагының урта сызыгы булыр.

17. Орынма кисемтәсенең бирелгән озынлыгын a дип, әйләнәнең радиусын r дип тамгалагыз. a һәм r катетлары буенча турыпочмаклы өчпочмак төзегез. Аның гипотенузасы c булсын. Эзләнелә торган нокта X бирелгән әйләнәнең үзәгеннән c ераклыгында урнашкан һәм бирелгән туры өстендә ята. Мәсьәләнең ике, бер чишелеше булырга яки бер чишелеше дә булмаска мөмкин.

18. а) Ике; б) уникe.

19. (O, r) әйләнәсе һәм A ноктасы, $A \neq 0$ бирелсен. OA турысын һәм OA турысына перпендикуляр MN диаметрын төзегез. $(A, |AM|)$ — эзләнелә торган әйләнә.

20. (O, r) әйләнәсе, AB хордасы һәм AB хордасына параллель MK орынмасы бирелсен ди. Орыну ноктасын C аша тамгалагыз. OC турысына карата күчәрле симметрияне тикшерегез.

21. Күрсәтмә. Күчәрле симметриядән файдаланыгыз.

22. Күрсәтмә. Бирелгән нокта аша почмакның икенче ягына перпендикуляр үткәрегез һәм перпендикулярның нигезеннән башлап почмакның шул ягы өстендә һәркайсының озынлыгы бирелгән озынлыкның яртысына тигез булган кисемтәләр салыгыз.

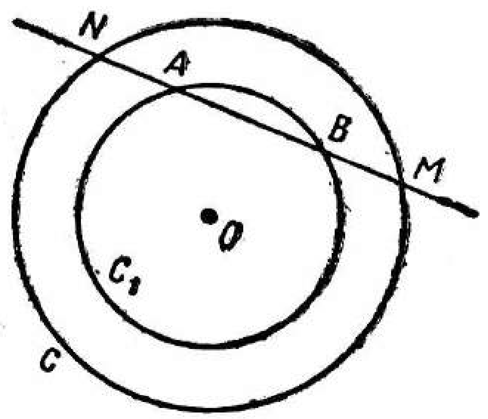
Әгәр бирелгән почмак кысынкы булса, мәсьәләнең я бер чишелеше була, я бер чишелеше дә булмый; әгәр почмак туры яки җәенке булса, мәсьәләнең чишелеше булмый.

24. Күрсәтмә. Гомуми очракта өчпочмакның медианасы аның биссектрисасы була алмый.

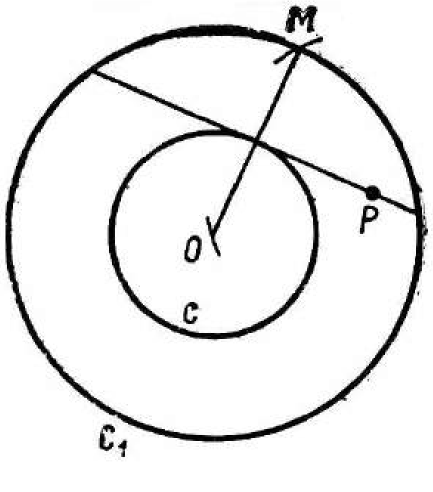
25. $c - (O, r)$ әйләнәсе, ә $c_1 - (O, |OA|)$ әйләнәсе булсын. AB турысын $|AB| = d$ булырлык итеп үткәрәбез (151 нче рәсем). AB турысы белән c әйләнәсенең кисешү нокталары M һәм N эзләнелә торган хорданы күрсәтәләр.

26. 152 нче рәсемне карагыз.

27. Күрсәтмә. Бу диагональләрнең конгруэнт дугаларны тартып торучы әйләнә хордалары булуын күрсәтегез.



151 нче рәсем



152 нче рәсем

28. Бу почмакның биссектрисасы, башлангыч ноктасыннан башка.

29. 4 см.

30. 12 см.

IV бүлек. ВЕКТОРЛАР

1. $[BD]$ — параллелограммнарның уртак диагонале, димәк, аларның уртак үзәкләре бар. Шулай булгач,
$$\begin{cases}\overrightarrow{MA_1} = -\overrightarrow{MC_1} \Rightarrow \overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC_1} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C}, \\ \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC}\end{cases}$$
(153 нче рәсем).

2. Мәсьәләнең шартыннан $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ икәнлеге килеп чыга. Ләкин $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$. Ул вакытта $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, моннан $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

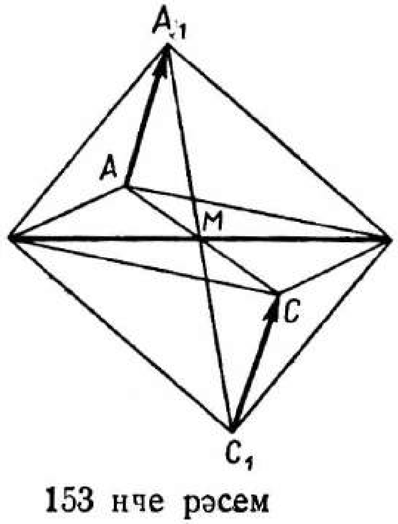
3. $[AA_1]$ — ABC өчпочмагының медианасы булганга күрә, $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Шуңа аналогик рәвештә, $[AA_1]$ — AB_1C_1 өчпочмагының медианасы, димәк, $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1})$ (154 нче рәсем). Моннан $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{CB_1}$.

4. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

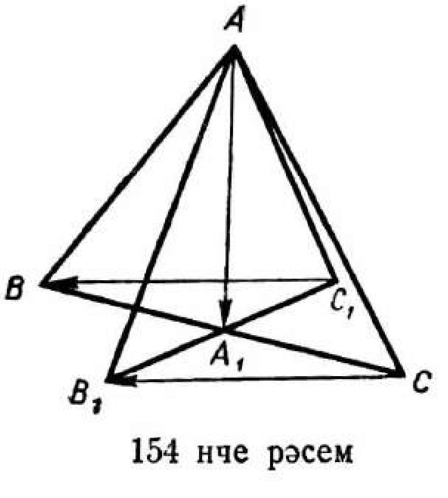
6. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Моннан $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$.

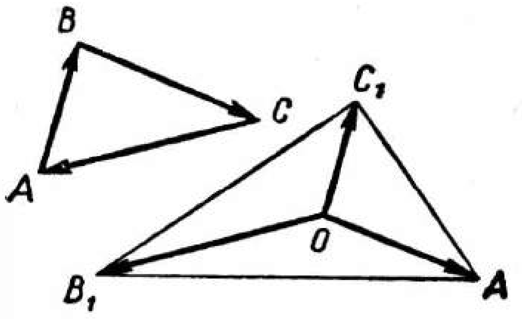
7. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, ә $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC_1}$ булганга күрә, $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{0}$ (155 нче рәсем). $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{0}$ тигезлегеннән $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = -\overrightarrow{OC_1}$ икәнлеге килеп чыга. Ләкин $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = 2\overrightarrow{OC_2}$, монда C_2 — $[A_1B_1]$ нең уртасы.



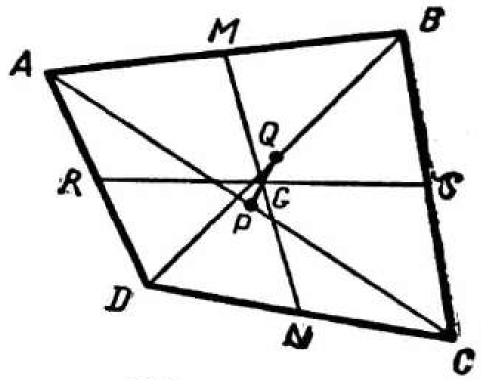
153 нче рәсем



154 нче рәсем



155 нче рәсем



156 нчы рәсем

Ул чагында $2\overrightarrow{OC_2} = -\overrightarrow{OC_1}$, димәк, O ноктасы C_1C_2 медианасыныкы була. Шул рәвешле O ноктасы $A_1B_1C_1$ өчпочмагының A_1A_2 һәм B_1B_2 медианаларыныкы булуын да күрсәтергә мөмкин, шулай булгач, O ноктасы медианаларның кисешү ноктасы белән тәңгәл килә.

8. $\begin{cases} \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG}, \\ \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG}, \\ \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

9. Бирелгән A, B, C нокталары өчен $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$ тигезлеге үтәлә. Ул вакытта яссылыкның теләсә нинди O ноктасы өчен язабыз:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}), \ \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Аналогик рәвештә, $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

10. S үзәкле симметриянең үзлеге буенча $\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SA}$ дип язабыз. Ул вакытта яссылыкның теләсә нинди O ноктасы өчен $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}$, моннан $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}$.

11. O — яссылыкның ирекле ноктасы булсын ди. 8 нче мәсьәләнең нәтиҗәсе буенча

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}),$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Беренче векторлы тигезлектән икенчесен алабыз:

$$\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC}),$$

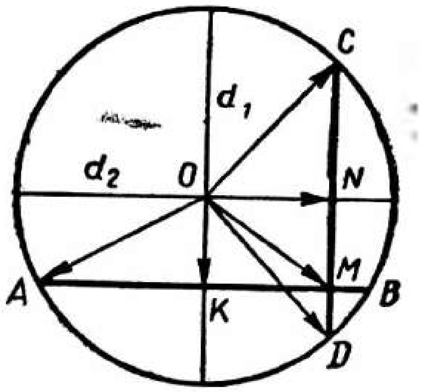
$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}).$$

12. M, N, P, Q, R һәм S — тиңдәшле рәвештә AB, CD, AC, BD, AD һәм BC кисемтәләренең урталары булсын (156 нчы рәсем). Әгәр O — яссылыкның ирекле ноктасы булса, ул вакытта

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}), \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}), \overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}),\quad \overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}),\quad \overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Моннан $\overrightarrow{OG_1}$ векторы (монда G_1 — MN кисемтәсенең уртасы) $\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ енә тигез. Аналогик рәвештә $\overrightarrow{OG_2}$ һәм $\overrightarrow{OG_3}$ векторлары да (монда G_2 һәм G_3 — PQ һәм RS кисемтәләренең урталары) $\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ енә тигез. Димәк, PQ, MN һәм RS кисемтәләренең $G=G_1=G_2=G_3$ кә тигез уртак урталары бар.



157 нче рәсем

13. Әйләнәнең тиңдәшле рәвештә AB һәм CD хордаларына перпендикуляр булган d_1 һәм d_2 диаметрларын үткәрегез (157 нче рәсем).

$$d_1\cap[AB]=K,\ d_2\cap[CD]=N.$$

$OKMN$ дүртпочмагы — турыпочмаклык һәм $[OM]$ — бу турыпочмаклыкның диагонале, моннан $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{ON}$.

Ләкин $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, ә $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, шуңа күрә

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

14. Шарт буенча O ноктасы $ABCD$ параллелограммының үзәге була, шуңа күрә $2\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}$ һәм $2\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$, димәк,

$$4\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}.$$

15. $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}-\lambda\overrightarrow{OC};\ \overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.$

16. A, B һәм C нокталары бер туры өстендә ятсыннар, ул вакытта $\overrightarrow{BC}$ һәм $\overrightarrow{BA}$ векторлары коллинеар һәм $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}$.

Ләкин $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

Моннан

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\Rightarrow\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$.

Кирёсе. $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$ тигезлеге үтәлсен ди, димәк, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$ яки $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}$, ягъни $\overrightarrow{BC}$ һәм $\overrightarrow{BA}$ векторлары коллинеар, ә A, B, C нокталары бер туры өстендә яталар.

17. $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC},$
$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CA},$
$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{AB},$

ул вакытта $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=(1+k)(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}).$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ икәнен исәпкә алып, $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ ны табабыз.

18. P ноктасы BC кисемтәсенеке, димәк, $\overrightarrow{CP}=\alpha\overrightarrow{CB}$. Икенче яктан, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{AM}$, шуңа күрә $\alpha\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{AM}$.

Ләкин $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{CA}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})-\overrightarrow{CA}=$

$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}.$$

Моннан

$$\alpha\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\beta\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\right).$$

$$\left(\alpha-\frac{\beta}{4}\right)\overrightarrow{CB}=\left(1-\frac{3}{4}\beta\right)\overrightarrow{CA}.$$

$\overrightarrow{CA}$ һәм $\overrightarrow{CB}$ векторлары коллинеар түгел, шуңа күрә

$$\begin{cases}\alpha-\frac{\beta}{4}=0, & \alpha=\frac{\beta}{4},\\ & \Rightarrow \\ 1-\frac{3}{4}\beta=0, & \beta=\frac{4}{3},\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3}$$

булса, тигезлек үтәлә.

Шулай итеп, $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\Rightarrow|\overrightarrow{CP}|:|\overrightarrow{PB}|=1:2.$

19. Яссылыкның ирекле O ноктасы өчен язабыз:

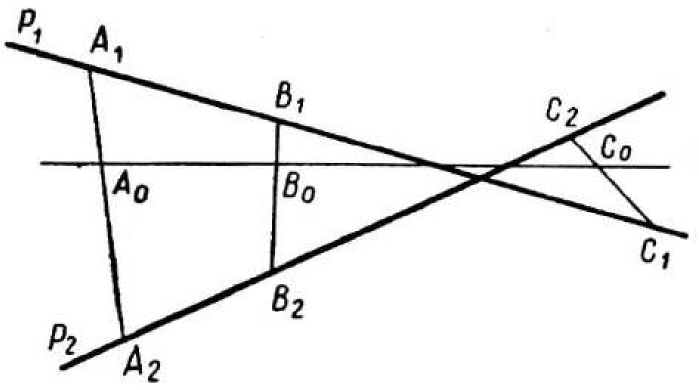
$$\overrightarrow{OA_0}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\alpha\overrightarrow{OA_2}}{1+\alpha},\ \overrightarrow{OB_0}=\frac{\overrightarrow{OB_1}+\alpha\overrightarrow{OB_2}}{1+\alpha},\ \overrightarrow{OC_0}=\frac{\overrightarrow{OC_1}+\alpha\overrightarrow{OC_2}}{1+\alpha}.$$

Моннан

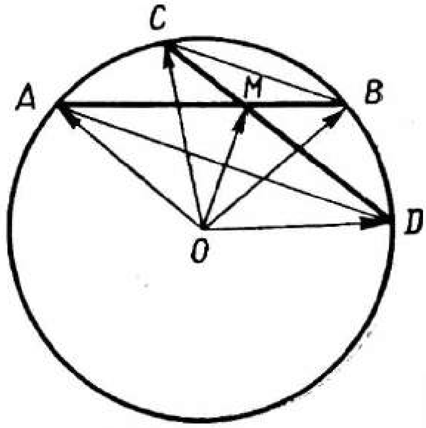
$$\overrightarrow{A_0B_0}=\frac{\overrightarrow{A_1B_1}+\alpha\overrightarrow{A_2B_2}}{1+\alpha},\ \overrightarrow{B_0C_0}=\frac{\overrightarrow{B_1C_1}+\alpha\overrightarrow{B_2C_2}}{1+\alpha}.$$

Шарт буенча $\overrightarrow{A_1B_1}=m\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{A_2B_2}=m\overrightarrow{B_2C_2}$, шуңа күрә $\overrightarrow{A_0B_0}=$ $=m\overrightarrow{B_0C_0}$; шулай булгач, A_0, B_0, C_0 нокталары бер туры өстендә яталар (158 нче рәсем).

20. $[OM)-AOD$ һәм COB почмакларының биссектрисасы икәнен исбатлагыз. Ул вакытта $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$ һәм $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$ векторлары $\overrightarrow{OM}$ векторына коллинеар (159 нчы рәсем).



158 нче рәсем



159 нчы рәсем

21. $k\vec{a} + l\vec{b} = p\vec{a} + q\vec{b}$ тигезлегеннән $(k - p)\vec{a} = (q - l)\vec{b}$ килеп чыга. Шарт буенча $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар түгел, димәк, $k - p = 0$ һәм $q - l = 0$ икән, векторлы тигезлек мөмкин була.

22. Шарт буенча $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OC}$ һәм $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \mu\overrightarrow{OB}$. Беренче векторлы тигезлектән икенчесен алабыз:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OC} - \mu\overrightarrow{OB}.$$

21 нче мәсьәләнең нәтиҗәсе буенча $\lambda = -1$, $\mu = -1$. Ул вакытта $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$; димәк, $\overrightarrow{OA}$ векторы $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ векторына коллинеар.

23. Мәсьәләнең шарты буенча

$$\lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD},\ \nu\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

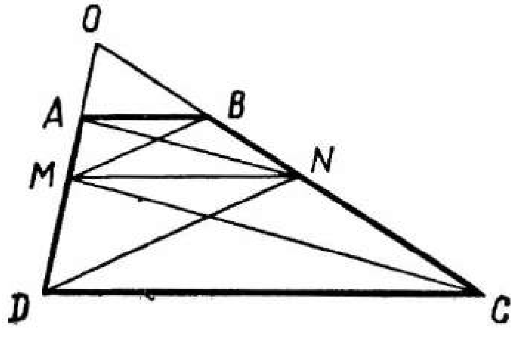
$$\mu\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}.$$

Векторлы тигезлекләрнең теләсә кайсы парын сайлап алабыз һәм, мәсәлән, беренче векторлы тигезлектән өченчесен алабыз. Ул вакытта

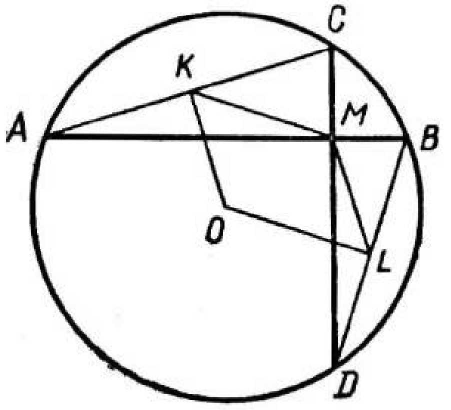
$$\lambda\overrightarrow{OA} - \nu\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \lambda = \nu = -1,$$

димәк, $-\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow -\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$

Шулай булгач, $\overrightarrow{OD}$ векторы $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ векторына коллинеар.



160 нчы рәсем



161 нче рәсем

24. $(\overrightarrow{DA})\cap(\overrightarrow{CB})=O$ булсын (160 нчы рәсем). Ул вакытта $\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OB}$.

Шарт буенча $(AN)\parallel(CM)$, моннан $\overrightarrow{OM}=\beta\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}=\beta\overrightarrow{ON}$. Димәк, $\overrightarrow{OD}=\frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{OB}$, шулай булгач, $(DN)\parallel(MB)$.

26. O ноктасыннан башлап $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын салабыз. Ул вакытта $\vec{a}+\vec{b}$ векторы $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын O ноктасыннан чыгучы яклары итеп алып төзелгән параллелограммның диагонале була. $\vec{a}-\vec{b}$ векторы шул ук параллелограммның икенче диагонале була.

Шарт буенча $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, димәк, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары өстендә төзелгән параллелограмм ромб була. Ромбның диагональләре үзара перпендикуляр, моннан $\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$. Әгәр $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар булсалар, $\vec{a}+\vec{b}$ яки $\vec{a}-\vec{b}$ векторларының берсе нуль-вектор була. Ә нуль-вектор теләсә нинди векторга перпендикуляр.

27. K ноктасы — AC хордасының уртасы, шуңа күрә $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$ (161 нче рәсем). L — BD хордасының уртасы. Шуңа күрә $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ (13 нче мәсьәләне кара). Моннан $\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$. Шулай итеп, $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{LM}$, димәк, $OKML$ дүртпочмагы — параллелограмм.

28. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ дип язып була. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$ векторы $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OF}$ векторына капма-каршы, шуңа күрә $|OE|=|OF|$. Моннан тыш, бу векторларның һәркайсы тигез озынлыктагы ($|OA|=|OB|=|OC|=|OD|$ булган) векторлар өстендә төзелгән ромбларның диагонале була. Шулай булгач, төзелгән $OAFB$ һәм $OCED$ ромблары конгруэнт. Ромбның диагонале аның симметрия күчәре икәне билгеле, димәк, (EF) — ике конгруэнт ромбның уртак түбәсе O аша үтүче симметрия күчәре. Моннан $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}=180°$, AC һәм BD — ике диаметр. Димәк, $ABCD$ дүртпочмагы — турыпочмаклык.

29. CC_1 — ABC өчпочмагының медианасы булсын, ул вакытта

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB});\ |\overrightarrow{CC_1}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|.$$

$\overrightarrow{CA}$ һәм $\overrightarrow{CB}$ коллинеар түгел, шуңа күрә

$$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|<|\overrightarrow{CA}|+|\overrightarrow{CB}|.$$

Моннан $|CC_1|<\frac{1}{2}(|CA|+|CB|)$.

30. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ икәне билгеле, моннан $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, O — яссылыкның теләсә нинди ноктасы. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ векторлары коллинеар булмаганлыктан,

$$|\overrightarrow{OM}|<\frac{1}{3}(|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|)\Rightarrow|OM|<\frac{1}{3}(|OA|+|OB|+|OC|).$$

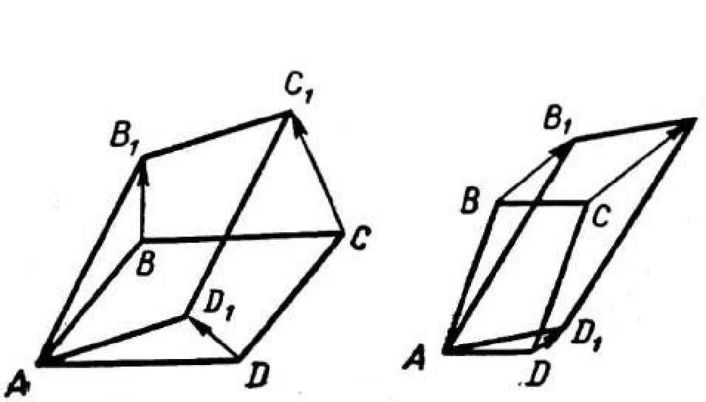
31. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын бер үк O ноктасыннан башлап салабыз. Ул вакытта $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары өстендә төзелгән параллелограмм турыпочмаклык була. $\vec{a}+\vec{b}$ һәм $\vec{a}-\vec{b}$ векторлары — бу турыпочмаклыкның диагональләре. Ләкин турыпочмаклыкның диагональләре тигезләр, шуңа күрә

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|.$$

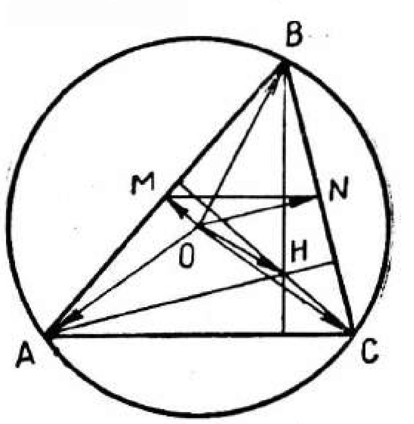
Кире теорема. Әгәр $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары өчен $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ тигезлеге үтәлсә, $\vec{a}\perp\vec{b}$ була.

Исбатлау. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ — бирелгән ике вектор булсын. Аларны бер үк O ноктасыннан башлап салабыз. Шарт буенча $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$, димәк, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары өстендә төзелгән параллелограммның диагональләре тигез озынлыкта. Андый параллелограмм турыпочмаклык була, шуңа күрә $\vec{a}\perp\vec{b}$.

34. Шарт буенча $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммнар, шуңа күрә $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}$ һәм $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (162 нче рәсем).



162 нче рәсем



163 нче рәсем

Беренче векторлы тигезлектән икенчесен алабыз:

$$\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{DD_1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|CC_1|\leqslant|BB_1|+|DD_1|.$$

35. $\triangle ABO\backsim\triangle CDO\Rightarrow\frac{|DO|}{|OB|}=\frac{|CO|}{|OA|}=\frac{b}{a};$

$$\triangle ADB\backsim\triangle MDO\Rightarrow\frac{|MO|}{|AB|}=\frac{|DO|}{|DB|}=\frac{b}{a+b}\Rightarrow\overrightarrow{MO}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

Аналогик рәвештә

$$\triangle DBC\backsim\triangle OBN\Rightarrow\frac{|ON|}{|DC|}=\frac{|OB|}{|DB|}=\frac{a}{a+b}\Rightarrow\overrightarrow{ON}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{DC}.$$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{NO}$ булганлыктан,

$$\overrightarrow{MN}=\frac{b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{DC}}{a+b}.$$

36. Өчпочмак почмагының биссектрисасы үзлеге буенча

$$\frac{|BC_1|}{|C_1A|}=\frac{|CB|}{|CA|}=\frac{3a}{b}.$$

Моннан

$$\frac{|BC_1|}{|BA|}=\frac{a}{a+b}.$$

Ләкин $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, шуңа күрә

$$(\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{CB})=\frac{a}{a+b}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}),$$
$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}.$$

37. $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ һәм $[OC]\perp[AB]$ булсын. OAC һәм BAO турыпочмаклы өчпочмакларының охшашлыгыннан $a^2=|AC|\cdot|AB|$ ны табабыз.

Аналогик рәвештә $\triangle OCB\backsim\triangle AOB\Rightarrow b^2=|BC|\cdot|BA|$.

Моннан $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{a^2}{b^2}$, димәк, C ноктасы кисемтәне $\frac{a^2}{b^2}$ чагыштырмасында бүлә. Ул вакытта $\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AB}$.

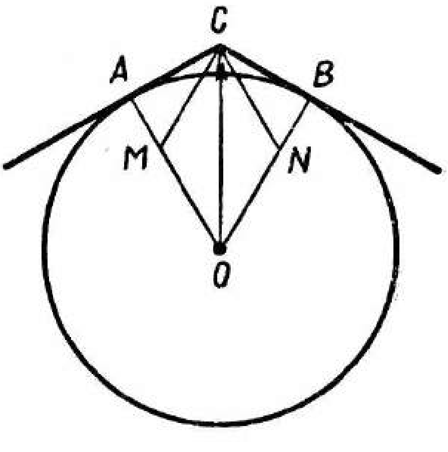
Ләкин $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, шуңа күрә

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\frac{a^2}{a^2+b^2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\frac{a^2\overrightarrow{OB}+b^2\overrightarrow{OA}}{a^2+b^2}.$$

38. $[AB]$ һәм $[BC]$ ләренә тиңдәшле рәвештә перпендикуляр булган (OM) һәм (ON) үткәрегез (163 нче рәсем).

AHC һәм NOM өчпочмаклары охшаш, $\frac{|AC|}{|MN|}=2$, димәк, $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{OM}\Rightarrow\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=2\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\Rightarrow\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+$

$+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$



164 нче рәсем

39. 1) $(CM)\parallel(OB)$ һәм $(CN)\parallel(OA)$ ны төзегез, $OMCN$ дүртпочмагы — ромб (164 нче рәсем). MCA өчпочмагында $|MA|=\frac{1}{2}|MC|\Rightarrow|MA|=\frac{1}{2}|MO|$, ягъни $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ икәне үзеннән-үзе аңлашыла. Ләкин

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

2) $\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

40. 1) $\overrightarrow{OC}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, 2) $\overrightarrow{OC}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,

3) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

42. $k\geqslant 0$ булганда, башы A ноктасындагы $\vec{a}$ на параллель нур; $k>0$ булганда, ачык нур; $-1\leqslant k\leqslant 1$ булганда, $2|\vec{a}|$ озынлыгындагы кисемтә; $-\infty<k<+\infty$ булганда, $\vec{a}$ векторына параллель һәм A ноктасы аша үтүче туры.

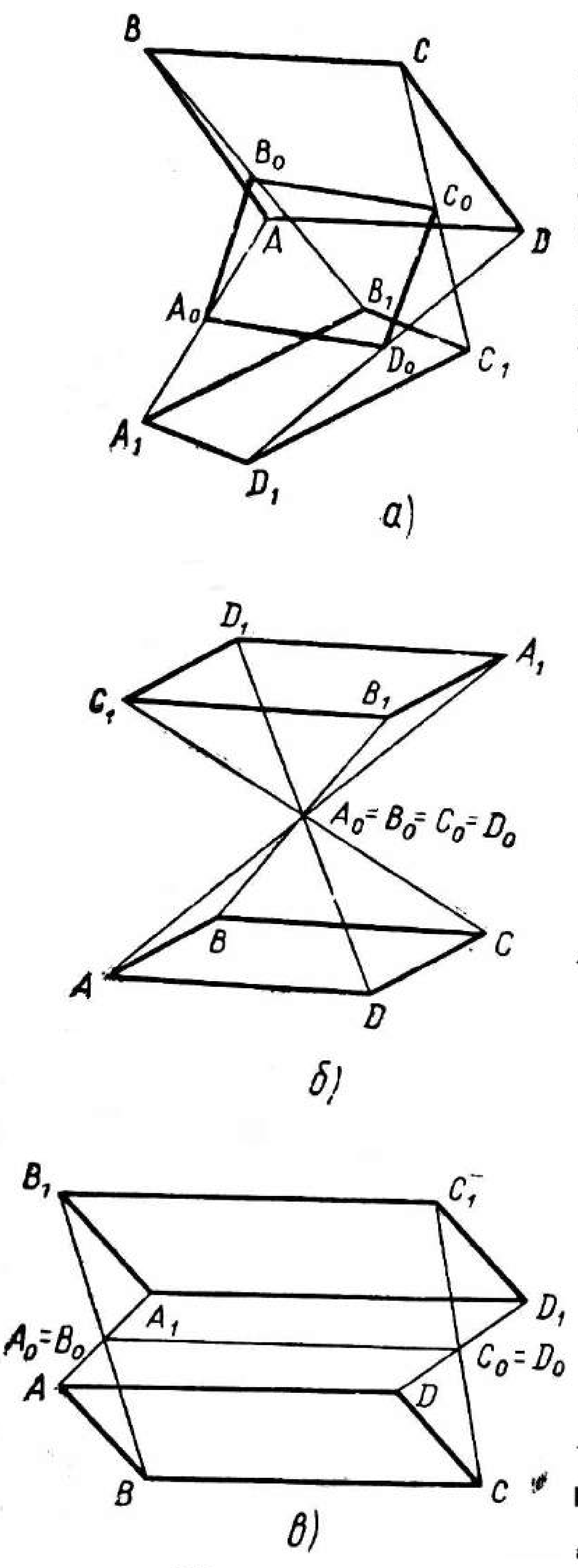
43. AOB почмагы һәм аның белән вертикаль почмак M нокталарының күплеге булып тора, өстәвенә OA һәм OB турылары бу күплеккә кермиләр.

44. $0\leqslant k\leqslant 1$, $0\leqslant l\leqslant 1$ булганда, $\overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{OB}$ векторлары өстендә төзелгән параллелограмм M нокталарының күплеге булып тора; $k\geqslant 0$, $l\geqslant 0$ булганда, AOB почмагы; $l\geqslant 0$ булганда, OB нуры; $-\infty<k<\infty$ булганда, OA турысы.

45. Бирелгән $\vec{a}$ векторы юнәлешенә параллель һәм O ноктасына карата симметрик булган ике туры чикләре булып хезмәт иткән полоса M нокталарының күплеге булып тора.

47. $[AB]\parallel[A_1B_1]$ һәм $|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{A_1B_1}|=1:2$ булган AA_1B_1B трапециясе M нокталарының күплеге булып тора.

48. BC кисемтәсен $\overrightarrow{OA}$ векторына параллель күчерү нәтиҗәсендә килеп чыккан B_1C_1 кисемтәсе M нокталарының күплеге булып тора.



165 нче рәсем

49. $\overrightarrow{OC}$ һәм $\overrightarrow{OD}$ күчерүләрендә A һәм B нокталарының образлары түбәләре булып хезмәт иткән параллелограммның нокталары күплеге M нокталарының күплеге була.

50. A_0, B_0, C_0, D_0 тиңдәшле рәвештә AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 кисемтәләренең урталары булсын (165 нче рәсем). Ул вакытта яссылыкның теләсә нинди O ноктасы өчен

$$\overrightarrow{OA_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA_1}),$$

$$\overrightarrow{OB_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB_1}),$$

$$\overrightarrow{OC_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC_1}),$$

$$\overrightarrow{OD_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD_1}).$$

Моннан

$$\overrightarrow{A_0B_0}=\overrightarrow{OB_0}-\overrightarrow{OA_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+$$

$$+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}),$$

$$\overrightarrow{D_0C_0}=\overrightarrow{OC_0}-\overrightarrow{OD_0}=$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OD_1})=$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{D_1C_1}).$$

Шарт буенча $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммнар, шуңа күрә $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ һәм $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$, шулай булгач, $\overrightarrow{A_0B_0}=\overrightarrow{D_0C_0}$ һәм $A_0B_0C_0D_0$ дүртпочмагы — параллелограмм.

51. $\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{|BQ|}{|QC|}=\frac{|CR|}{|RD|}=\frac{|DS|}{|SA|}=k$

булсын. O — яссылыкта ирекле рәвештә алынган нокта.

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=k\Rightarrow\frac{\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}}=k\Rightarrow\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}}{1+k}.$$

Аналогик рәвештә,

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}}{1+k},\ \overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{OD}}{1+k},\ \overrightarrow{OS}=\frac{\overrightarrow{OD}+k\overrightarrow{OA}}{1+k}.$$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ икәнен аңлау кыен түгел.
Чыннан да,

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+k}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{k}{1+k}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=$$
$$=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}.$$
$$\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OS}=\frac{1}{1+k}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})+\frac{k}{k+1}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=$$
$$=\frac{k}{k+1}\overrightarrow{DC}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AD}.$$

Ләкин $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ һәм $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, шуңа күрә $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}\Rightarrow PQRS$— параллелограмм.

52. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының медианалары кисешү нокталарын тиңдәшле рәвештә G һәм G_1 аша тамгалыйк. $(AG)\parallel(B_1C_1)$, $(BG)\parallel(A_1C_1)$ һәм $(CG)\parallel(A_1B_1)$ булсын. Ул вакытта шарт буенча $\overrightarrow{GA}=\lambda(\overrightarrow{G_1B_1}-\overrightarrow{G_1C_1})$, $\overrightarrow{GB}=\mu(\overrightarrow{G_1C_1}-\overrightarrow{G_1A_1})$, $\overrightarrow{GC}=\nu(\overrightarrow{G_1A_1}-\overrightarrow{G_1B_1})$.

Бу тигезлекләрне буынлап кушып, табабыз: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{G_1A_1}(\nu-\mu)+\overrightarrow{G_1B_1}(\lambda-\nu)+\overrightarrow{G_1C_1}(\mu-\lambda)$.

Ләкин $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$,
шуңа күрә $\overrightarrow{G_1A_1}(\nu-\mu)+\overrightarrow{G_1B_1}(\lambda-\nu)+\overrightarrow{G_1C_1}(\mu-\lambda)=\vec{0}$.

Икенче яктан, $\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_1C_1}=\vec{0}$.
Моннан $\lambda=\nu=\mu$ икәнен табабыз.

Шулай итеп, $\frac{1}{\lambda}(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})=\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_1B_1}-2\overrightarrow{G_1C_1}=3(\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_1B_1})-3\overrightarrow{G_1C_1}$, ягъни $\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{G_1C_1}\Rightarrow(BA)\parallel(G_1C_1)$.

53. AC — $ABCD$ параллелограммының диагонале, шуңа күрә $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, ә ул вакытта $\overrightarrow{AN}=\alpha(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$.

Икенче яктан, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\beta\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$.

Моннан

$$\alpha\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AD}=\frac{\beta}{2}\overrightarrow{AB}+(1-\beta)\overrightarrow{AD},\ \left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AB}=(1-\beta-\alpha)\overrightarrow{AD}.$$

Векторлар коллинеар түгел, шуңа күрә тигезлек

$$\alpha - \frac{\beta}{2} = 0,\ 1 - \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{2}{3},\ \alpha = \frac{1}{3}$$

очрагында гына мөмкин.

Шулай итеп, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AN}| : |\overrightarrow{NC}| = 1:2.$

54. $\overrightarrow{AS} = \alpha\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = \alpha\overrightarrow{AD} + \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB}.$

Икенче яктан, $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{DP}$. Ләкин $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, шуңа күрә $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AD}$.

Моннан $\alpha\overrightarrow{AD} + \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB} = \beta\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{AB}$ векторлары коллинеар түгел, шуңа күрә тигезлек

$$\frac{\alpha}{2} - \beta = 0 \text{ һәм } 1 - \frac{\beta}{2} - \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = \beta, \\ \alpha = 1 - \frac{\beta}{2}, \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{5},\ \beta = \frac{2}{5}$$

очрагында гына мөмкин.

Шулай итеп, $|\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SQ}| = 4:1$, $|\overrightarrow{DS}| : |\overrightarrow{SP}| = 2:3$.

55. M, N, P, Q, R — тиңдәшле рәвештә AB, BC, CD, DE, EA якларының урталары булсын, ул вакытта

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{ON},$$
$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OQ},$$
$$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OR}.$$

Моннан $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$.

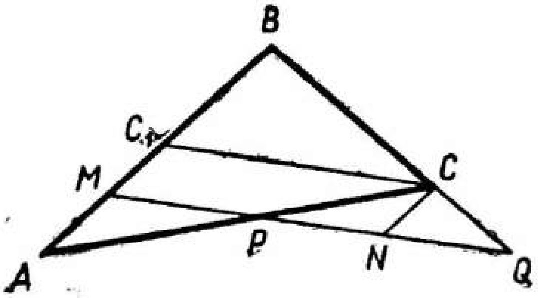
Икенче яктан, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OC}$,

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OD}$,

$\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OE}$,

$\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$,



166 нчы рәсем

димәк, $2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) = k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$.

Шулай булгач, $(1-k)(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})=\vec{0}$.

Ләкин $1-k\neq 0$, шуңа күрә $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

56. ABC өчпочмагының C түбәсе аша (AB) на параллель итеп (CN) үткәрәбез, $(CN)\cap(PQ)=N$ (166 нчы рәсем).

$\triangle ACC_1 \sim \triangle CPN$ һәм $\triangle BCC_1 \sim \triangle CQN$ икәнен күрү кыен түгел.

Моннан

$$\frac{|CC_1|}{|QN|}=\frac{|CC_1|}{|NP|},$$

шуңа күрә $|QN|=|NP| \Rightarrow 2\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QM}$.

57. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{CB}$ булсын, ул вакытта $\overrightarrow{MN}=$

$$=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{n+1}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{n+1}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-$$

$$-\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}=\frac{n}{n+1}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{n(n+1)}\overrightarrow{AB}.$$

Бер яктан, $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AC}$, икенче яктан, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{MN}=$ $=\frac{n+1-\beta}{n(n+1)}\overrightarrow{AB}+\frac{\beta n}{n+1}\overrightarrow{AC}$.

Шулай итеп, $\alpha\overrightarrow{AC}=\frac{n+1-\beta}{(n+1)n}\overrightarrow{AB}+\frac{\beta n}{n+1}\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\beta n}{n+1}\\ n+1-\beta=0\end{cases}\Rightarrow \alpha=n\Rightarrow \overrightarrow{AD}=n\overrightarrow{AC}.$$

58. A үзәкле симметрия X ноктасын Y ноктасына чагылдырсын ди, ул вакытта $\overrightarrow{OY}=-\overrightarrow{OX}+2\overrightarrow{OA}$, монда O — теләсә нинди нокта. Аннары $\overrightarrow{OB}$ күчерүе Y ноктасын Z ноктасына чагылдыра, ул вакытта $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OB}$.

Моннан $\overrightarrow{OZ}=-\overrightarrow{OX}+2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,

$$\overrightarrow{OZ}=-\overrightarrow{OX}+2\left(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right).$$

Шулай итеп, үзәкле симметрияне һәм параллель күчерүне эзлекле үтәү — үзәкле симметрия ул.

59. Үзәкле симметриянең векторлы тигезләмәсен файдаланабыз. A үзәкле симметриядә пространствоның ирекле X ноктасы Y ноктасына чагылдырылсын ди, ул вакытта $\overrightarrow{OY}=-\overrightarrow{OX}+2\overrightarrow{OA}$. B үзәкле симметрия Y ноктасын $\overrightarrow{OZ}=-\overrightarrow{OY}+2\overrightarrow{OB}$ тигезләмәсе белән билгеләнә торган Z ноктасына чагылдыра. Өченче симметрия Z ноктасын W ноктасына чагылдыра, ул вакытта $\overrightarrow{OW}=$

$= -\overrightarrow{OZ} + 2\overrightarrow{OC}$. Үзәкләре A, B, C булган өч симметрия X ноктасын W ноктасына чагылдыра.

$$\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OY} - 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OX} + 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}.$$

Шулай итеп, үзәкле өч симметрияне эзлекле үтәү нәтиҗәсендә

$$\overrightarrow{OW} = -\overrightarrow{OX} + 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

тигезләмәсе белән бирелгән үзгәртү табарбыз. Бу үзәге $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ векторы белән билгеләнгән ноктадагы үзәкле симметрия була (ягъни бу нокта $ABCD$ параллелограммының дүртенче ноктасы була).

60. M һәм N тиңдәшле рәвештә ABC_1 һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары булсын. Ул вакытта

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC_1}) \text{ һәм } \overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SB_1} + \overrightarrow{SC}).$$

Шарт буенча $\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SB_1}$, $\overrightarrow{SC_1} = -\overrightarrow{SC}$. Моннан $\overrightarrow{SM} = -\overrightarrow{SN}$. Димәк, ABC_1 һәм A_1C_1C өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары S ка карата симметрияле.

V бүлек. ОХШАШЛЫК

§ 1. ГОМОТЕТИЯ

1. $\overrightarrow{AA_1} \neq \overrightarrow{BB_1}$.

2. AA_1 һәм BB_1 һәм AB_1 һәм A_1B турыларының кисешү ноктасын төзегез.

3. $k = 1$, $k = -1$.

4. Гомотетия коэффициентлары капма-каршы саннар булса, мөмкин.

5. Гомотетиянең үзлекләреннән файдаланыгыз: гомотетиядә параллель туры кисемтәләренең озынлыклары чагыштырмасы бу кисемтәләрнең образлары озынлыкларының чагыштырмасына тигез; гомотетиядә почмак аңа конгруэнт почмакка чагылдырыла.

6. $\frac{4}{9}$.

7. Әгәр ике гомотетиянең коэффициентлары тапкырчыгышы берәмлектән үзгә сан булса, гомотетия табабыз. Киресе булган очракта я күчерү, я бердәй чагылдыру була. Бирелгән гомотетияләрнең үзәкләре төрле булганлыктан, күчерү табарбыз.

8. Үзәкле симметрия.

9. Күчерү һәм гомотетия һәр турыны аңа параллель турыга чагылдыралар. Кисемтәнең озынлыгы $|k|$ на тапкырлана, монда k — бирелгән гомотетиянең коэффициенты. Ә бу — нәтиҗәдә гомотетия табылуын аңлата да инде.

Эзләнелә торган гомотетиянең үзәген төзү өчен ирекле рәвештә A һәм B нокталары алыгыз да аларның күчерүдәге образларын — A_1 һәм B_1 не, аннары гомотетиядәге образлары A_2 һәм B_2 не төзегез. AA_2 һәм BB_2 турылары эзләнелә торган ноктада кисешәләр.

10. Әгәр гомотетия булса, бу гомотетиянең үзәге аша үтүче теләсә нинди туры; әгәр параллель күчерү булса, күчерү юнәлешенә параллель теләсә нинди туры.

11. $H_{O_1}^{k_1}(X) = Y$ һәм $H_{O_2}^{k_2}(X) = Y$ булсын. Күренгәнчә, $H_{O_2}^{\frac{1}{k_2}}(Y) = X$, шуңа күрә $H_{O_2}^{\frac{1}{k_2}} H_{O_1}^{k_1}(X) = X$. Ләкин әгәр $k_1 \neq k_2$ булса, $H_{O_2}^{\frac{1}{k_2}} H_{O_1}^{k_1}$ гомотетия була, өстәвенә X ноктасы — бу гомотетиянең үзәге. Шулай итеп, $k_1 = k_2$ булганда, X, Y гомотетияләренең икесенең дә бердәнбер уртак пар нокталары бар. Әгәр $k_1 = k_2$ булса, уртак пар нокталары юк.

12. a һәм b турыларына параллель һәм a дан ераклыгы a һәм b арасындагы ераклыкның яртысына тигез булган туры.

13. Әгәр O_1 һәм O_2 — почмакларның түбәләре булса, O_1O_2 турысының O_1O_2 кисемтәсе нокталарын эченә алмаган барлык нокталары эзләнелә торган нокталар күплеге була.

14. $k_1 = \frac{|AM|}{|AB|}$, $k_2 = \frac{|MB|}{|AB|}$, $k_1 + k_2 = 1$.

15. $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

16. Әгәр әйләнәләр конгруэнт икән, әйләнәләрнең берсен икенчесенә чагылдыра торган бер гомотетия бар ($k = -1$).

Әгәр әйләнәләр концентрик булса, барлык гомотетияләрнең уртак үзәге — әйләнәләр үзәге бар.

Калган барлык башка очракларда гомотетиянең ике үзәге бар.

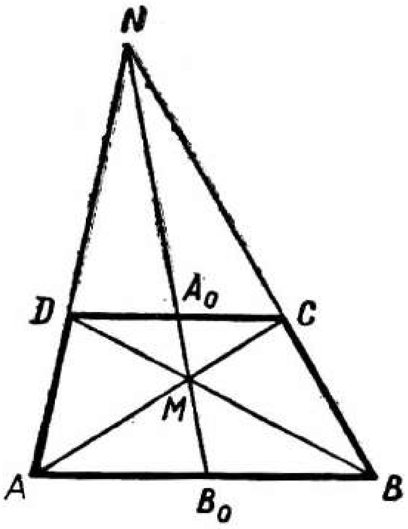
Теләсә нинди ике әйләнәнең гомотетия үзәге бар. Әгәр (O_1, R_1) һәм (O_2, R_2) — бирелгән әйләнәләр һәм $[O_2A_2]$, $[O_2A_2']$ икенче әйләнәдә беренче әйләнәнең O_1A_1 радиусына параллель булган радиуслар икән, A_1A_2 һәм A_1A_2' турыларының үзәкләр сызыгы (O_1O_2) белән кисешү нокталары гомотетия үзәкләре була.

18. F әйләнәсенең үзәге — O. O_1 — бирелгән гомотетиядә O ноктасының образы. F_1 — O_1 ноктасыннан kR ераклыгындагы нокталар күплеге (k — гомотетия коэффициенты), ягъни үзәге O_1 ноктасындагы kR радиуслы әйләнә.

Гомотетиянең үзәге үзенә чагылдырылганга күрә, ул F_1 әйләнәсенеке дә була. Әгәр F_1 һәм F_2 нең тагын бер уртак ноктасы бар дип уйласак, бу икенче нокта шул ук гомотетиядә шулай ук үзенә гомотетик, ягъни гомотетия үзәге була, ә бу мөмкин түгел.

19. Өчпочмаклар M үзәкле гомотетиядә гомотетик, шулай булгач, бу өчпочмакларны камаучы әйләнәләр дә гомотетик һәм гомотетия үзәге әйләнәләр өстендә ята, ягъни аларның орыну ноктасы була.

20. 19 нчы мәсьәләне карагыз.



167 нче рәсем

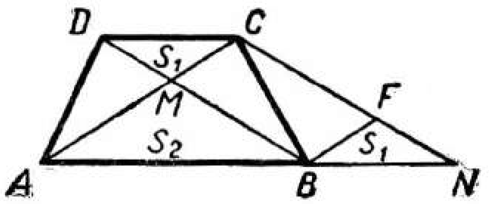
21. Ноктадар хордаларны $m:n$ чагыштырмасында бүлсеннәр ди. Хордалар өчен уртак нокта үзәге булган $k=\frac{m}{m+n}$ коэффициентлы гомотетиядә бирелгән әйләнәнең образы, ягъни бирелгән әйләнәгә хордалар өчен уртак ноктада эчке яктан орынган $r=\frac{n}{m+n}R$ радиуслы әйләнә (монда R — бирелгән әйләнәнең радиусы) эзләнелгән ноктадар күплеге була.

22. 21 нче мәсьәләне карагыз.

23. Бирелгән өчпочмакның урта сызыклары белән төзелгән өчпочмакны камаучы әйләнә бирелгән өчпочмакны камаучы әйләнәгә $k=-\frac{1}{2}$ коэффициенты белән гомотетик. Димәк, аның радиусы бирелгән өчпочмакны камаучы әйләнәнең ярты радиусына тигез.

24. $ABCD$ — нигезләре AB һәм CD булган трапеция, M—AC һәм BD диагональләренең кисешү ноктасы, N — AD һәм BC турыларының кисешү ноктасы (167 нче рәсем).

M үзәкле гомотетия CD кисемтәсен AB кисемтәсенә чагылдыра, димәк, CD кисемтәсенең уртасы A_0 не AB кисемтәсенең уртасы B_0 гә чагылдыра; шулай булгач, гомотетия үзәге MA_0B_0 турысыныкы. N ноктасының да A_0B_0 турысыныкы икәнлеге шулай ук исбатлана.



168 нче рәсем

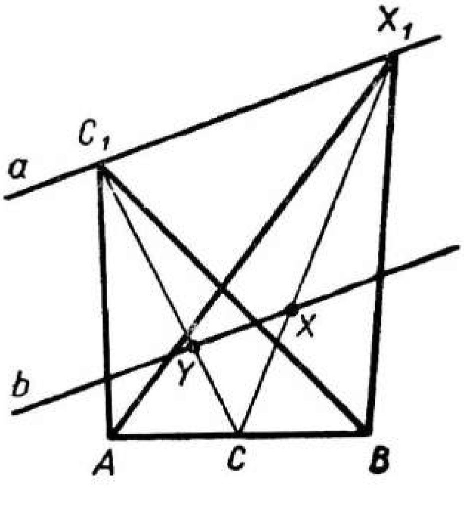
25. $k_1+k_2=1$; $k_1^2=\frac{S_1}{S}$; $k_1=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$;

$$k_2^2=\frac{S_2}{S};\ k_2=\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}};\ \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}.$$

26. N — AB турысы белән C ноктасы аша DB га параллель үтүче турының кисешү ноктасы (168 нче рәсем). ACN өчпочмагының мәйданы бирелгән трапециянең мәйданы S ка тигез. $(BF)\parallel(AC)$. BFN өчпочмагының мәйданы DMC өчпочмагының мәйданы S_1 гә тигез.

AMB һәм BFN өчпочмаклары ACN өчпочмагына k_1 һәм k_2 коэффициентлары белән гомотетик, өстәвенә $k_1+k_2=1$ (25 нче мәсьәләне кара).

Ләкин $k_1=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$, $k_2=\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$; шулай булгач, $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$.



169 нчы рәсем

27. Киселеп алынган өчпочмаклар бирелгән өчпочмакка

$$k_1=\frac{|PQ|}{|AB|}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}};\quad k_2=\frac{|AS|}{|AB|}=\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}};\quad k_3=\frac{|FB|}{|AB|}=\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}$$

коэффициентлары белән гомотетик.

Ләкин $k_1+k_2+k_3=\frac{|AF|+|SB|+|AF|+|FS|+|FS|+|SB|}{|AB|}=2$,

димәк,

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=2\sqrt{S}.$$

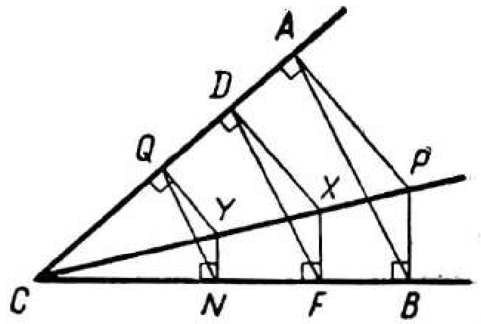
$$(F\in(AB),\ S\in(AB),\ P\in(AC),\ Q\in(CB)).$$

28. A_1B_1G өчпочмагы $\frac{1}{3}$ коэффициенты белән ABC өчпочмагына гомотетик. Ләкин $k=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$, димәк $S_1=k^2S$, $S_1=\frac{1}{9}S$, монда S_1 — A_1B_1G өчпочмагының мәйданы.

29. а) $Y-C_1$ түбәсе a турысында яткан AC_1B өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы булсын (169 нчы рәсем). $\overrightarrow{CY}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Y — коэффициенты $\frac{1}{3}$ булган C үзәкле гомотетиядә C_1 ноктасының образы, b — шул ук гомотетиядә a турысының образы.

б) Әгәр X ноктасы b турысыныкы булса, үзәге C һәм коэффициенты 3 кә тигез булган гомотетиядә X ноктасы a турысыныкы булган X_1 ноктасына чагылдырыла. AX_1B өчпочмагында X — медианаларның кисешү ноктасы.

Эзләнелгән күплек үзәге AB кисемтәсенең уртасында һәм коэффициенты $k=\frac{1}{3}$ булган гомотетиядә a турысы нокталарына гомотетик булган b турысының нокталарыннан тора.

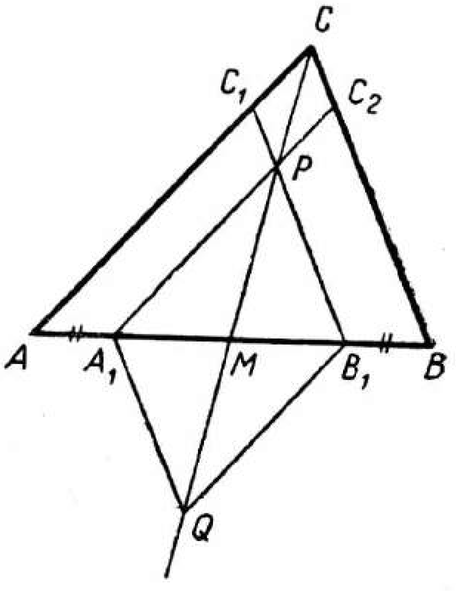


170 нче рәсем

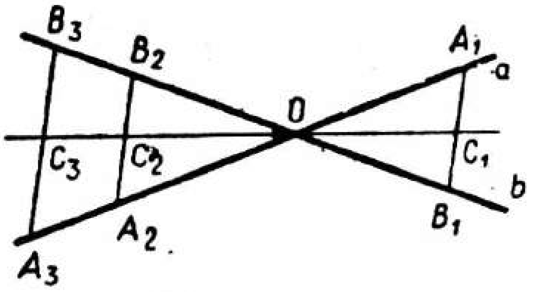
30. а) X ноктасы мондый үзлеккә ия булсын. X — AB кисемтәсен аңа параллель булган DF кисемтәсенә чагылдыра торган C үзәкле гомотетиядә P ноктасының образы. Ул вакытта X ноктасы CP нуры өстендә ята (170 нче рәсем).

б) Y — CP нурының ирекле ноктасы. $(YQ)\perp(AC)$, димәк, $(YQ)\parallel(AP)$ һәм Фалес теоремасы буенча $|AC|:|QC|=$ $=|PC|:|YC|$.

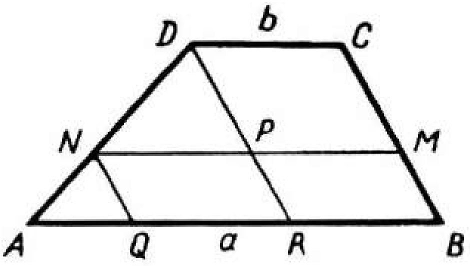
Аналогик рәвештә $|BC|:|NC|=$ $=|PC|:|YC|$, ягъни $|AC|:|QC|=$ $=|BC|:|NC|$, димәк, $(QN)\parallel(AB)$.



171 нче рәсем



172 нче рәсем



173 нче рәсем

Эзләнелгән нокталар күплеге — ачык CP нуры.

31. CC_1 кисемтәсен аңа параллель PA_1 кисемтәсенә чагылдыра торган гомотетиянең CC_1PC_2 параллелограммын PA_1QB_1 параллелограммына чагылдыруын исбатлагыз (171 нче рәсем). Ул вакытта C, P һәм P, Q нокталары гомотетиядә тиңдәшле нокталар булганлыктан, бер туры өстендә ятарга тиешләр. $[PQ]$ — параллелограммның диагонале, шуңа күрә $|A_1M|=|MB_1|$. $|AA_1|$ һәм $|BB_1|$ ераклыклары тигезлегеннән $|AM|$ һәм $|MB|$ ераклыкларының тигезлеге килеп чыга.

32. ABC өчпочмагында CC_1 медианасының R ноктасы аша (AB) на параллель һәм (AC) һәм (BC) ларын тиңдәшле рәвештә P һәм Q нокталарында кисүче туры үткәрегез. Тигез чагыштырмаларны языгыз:

$$\frac{|AC_1|}{|PR|}=\frac{|CC_1|}{|CR|}=\frac{|C_1B|}{|RQ|}.$$

Мәсьәләнең шарты буенча $|AC_1|=|C_1B|$, шулай булгач, $|RP|=|RQ|$.

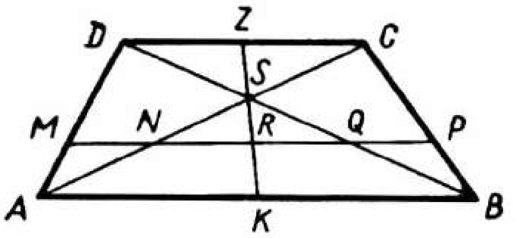
33. C_1, C_2, C_3 — тиңдәшле рәвештә A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 кисемтәләренең урталары булсын (172 нче рәсем). Коэффициенты $k_1=\frac{|OA_2|}{|OA|}$ (яки $-k_1$) булган $O=a\cap b$ үзәкле гомотетия C_2 ноктасын C_1 ноктасына чагылдыра, ә үзәге шул ук, ләкин коэффициенты $k_2=\frac{OA_3}{OA_1}$ (яки $-k_2$) булган гомотетия C_3 ноктасын C_1 ноктасына чагылдыра. Бу — O, C_1, C_2 нокталары кебек үк O, C_1, C_3 нокталары да бер үк турыныкы дигән сүз. Димәк, бу турылар тәңгәл киләләр, шулай булгач, C_1, C_2, C_3 нокталары O ноктасы аша үтүче турыныкы булалар.

34. Тигез чагыштырмаларны языгыз:

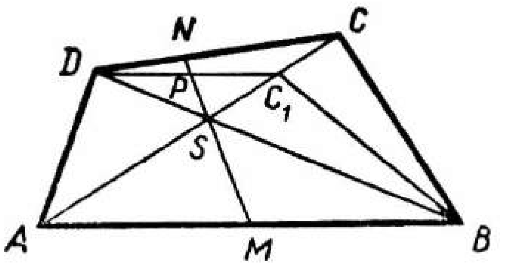
$$\frac{|AB|}{|NS|}=\frac{|BD|}{|SD|}=\frac{|AC|}{|SC|}=\frac{|AB|}{|SM|},$$

моннан $|NS|=|SM|$.

35. Дүртпочмак трапеция булмасын ди $(AB)\nparallel(DC)$. S үзәкле һәм $k=\frac{|SD|}{|SA|}$ коэффициентлы гомотетия B ноктасын $-B_1$ ноктасына, ә M ноктасын M_1 ноктасына чагылдыра. CDB_1 өчпочмагының NM_1 урта сызыгы нигезенә параллель түгел, моның булуы мөмкин түгел.



174 нче рәсем



175 нче рәсем

36. Трапецияләрнең охшашлыгыннан $\frac{a}{|MN|}=\frac{|MN|}{b}$ икәнлеге килеп чыга, моннан $|MN|=\sqrt{ab}$.

37. N ноктасы аша (CB) на параллель һәм (AB) ын Q ноктасында кисүче туры, ә D ноктасы аша (BC) на параллель һәм (MN) һәм (AB) ларын тиңдәшле рәвештә P һәм R нокталарында кисүче туры үткәрегез (173 нче рәсем). Тигез чагыштырмаларны языгыз:

$$k=\frac{|AN|}{|ND|}=\frac{|AQ|}{|QR|}=\frac{|AQ|}{|NP|}=\frac{a-d}{d-b}.$$

Җавап. $d=\frac{a+kb}{1+k}$.

38. AB һәм CD нигезләренең урталары K һәм Z ны диагональләренең кисешү ноктасы S аша үтүче һәм $[MP]$ ен R ноктасында кисүче кисемтә белән тоташтырыгыз (174 нче рәсем). R—$[MP]$ нең уртасы һәм R шулай ук $]NQ[$ нең дә уртасы булуын искәрегез, димәк, $|MN|=|QP|$ (33 нче мәсьәләне кара).

39. 38 нче мәсьәләне карагыз.

40. Каршы кую методы белән исбатлагыз.
DC ягы $[AB]$ нә параллель булмасын ди, шуның белән бергә AB һәм CD якларының урталары һәм дүртпочмак диагональләренең кисешү ноктасы S бер туры өстендә яталар (175 нче рәсем). $(AB)\parallel(DC_1)$ үткәрәбез, $C_1\in(AC)$. MN турысы $[DC_1]$ ен аның уртасы P да кисеп үтә (35 нче мәсьәлә). Ләкин ул вакытта $[NP]$ — DCC_1 өчпочмагының урта сызыгы һәм $[NP]\parallel[CC_1]$, ә бу S ноктасының NP турысыныкы булуына каршы килә.

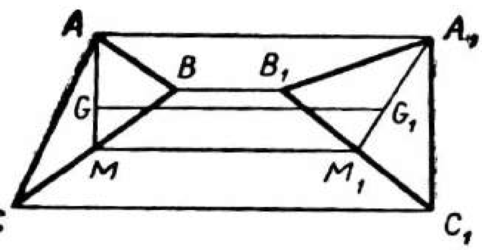
41. O ноктасы аша үтүче туры $[BC]$ ен M ноктасында, $[AD]$ ен N ноктасында кисеп үтсен ди.

$\frac{|AB|}{|NO|}=\frac{|BD|}{|OD|}$, $\frac{|AC|}{|OC|}=\frac{|AB|}{|OM|}$ пропорцияләрен языгыз.

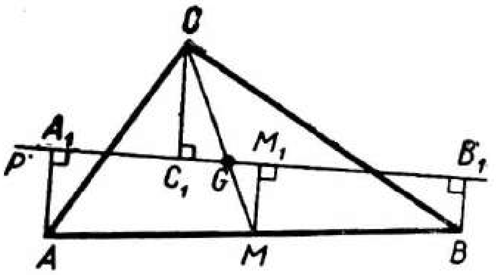
Моннан $\frac{|BD|}{|OD|}=\frac{|AC|}{|OC|}\to(AB)\parallel(CD)$.

42. Исбатлаганда каршы кую методын файдаланыгыз. (40 нчы мәсьәләне кара.)

43. $\frac{|AP|}{|AC|}=\frac{|BM|}{|BC|}$, $\frac{|AQ|}{|AB|}=\frac{|CM|}{|CB|}$ икәнен искә алыгыз.



176 нчы рәсем



177 нче рәсем

44. ADC өчпочмагының медианалары үзлекләрен файдаланып, $|MP|:|PC|=1:2$ икәненә һәм, $ABCM$ трапециясен тикшереп, $|AQ|:|QC|=1:2$ булуына ышаныгыз.

45. P ноктасы аша (AC) на параллель һәм (BC) ын Q ноктасында кисүче туры үткәрегез, Q аша — (BD) на параллель һәм (CD) ын R ноктасында кисүче туры, R аша (AC) на параллель һәм (AD) ын S ноктасында кисүче туры үткәрегез. $(PS) \parallel (QR)$ икәнен исбатлагыз. Мәсьәләнең чиксез күп чишелеше бар.

46. Мәсьәләнең ике чишелеше бар. Мәсәлән, AB нигезенең уртасы M ны D түбәсе белән тоташтырыгыз. Әгәр $[AC]\cap[DM|=$ $=P$ булса, P ноктасы аша үтүче туры $[AB]$ нә параллель — шул эзләнелгән туры була да инде.

47. AB ягын P ноктасы белән $2:1$ чагыштырмасында бүлегез. $(BD)\cap(PC)$ ноктасы аша AB турысына параллель туры үткәрегез. Мәсьәләнең ике чишелеше бар.

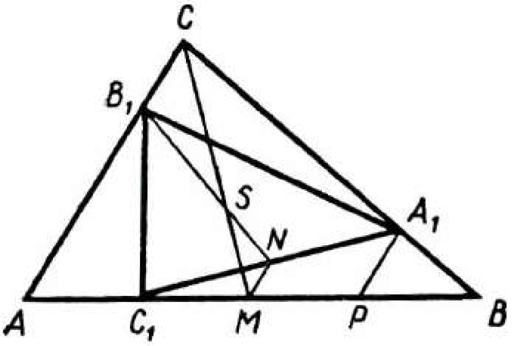
48. M һәм M_1 — BC һәм B_1C_1 якларының урталары булсын (176 нчы рәсем). MM_1 турысы (AA_1) на параллель. Медианаларның кисешү нокталары G һәм G_1 AM һәм A_1M_1 кисемтәләренең һәркайсын $2:1$ чагыштырмасында бүләләр, шулай булгач, $(GG_1)\parallel(AA_1)$.

49. A_1, B_1, C_1 — өчпочмак түбәләренең p турысына проекцияләре булсын (177 нче рәсем). AB ягының уртасы M ның p га проекциясен M_1 дип тамгалагыз. $|MM_1|=\frac{1}{2}|CC_1|$ икәнен искәрегез. $|MM_1|=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)$. Димәк, $|CC_1|=|AA_1|+|BB_1|$.

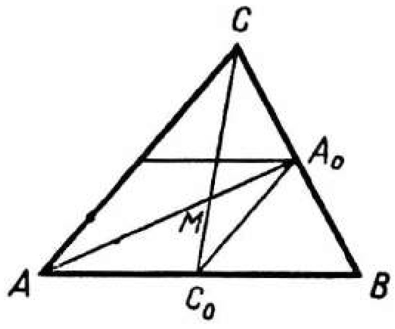
50. $|\overrightarrow{PR}|:|\overrightarrow{RQ}|=1:k\ (k\neq 0)$.

51. P_0Q_0 турысын төзегез. $(P_0Q_0)\cap r=R_0^1$, $(P_0Q_0)\cap r_1=R_0^n$ булсын. $\frac{|P_0Q_0|}{|Q_0R_0^1|}=\frac{|P_0Q_0|}{|Q_0R_0^n|}$ икәненә ышаныгыз, моннан $R_0^1=R_0^n=R=$ $=r\cap r_1$.

52. CM һәм B_1N медианаларын үткәрегез (178 нче рәсем). Бу медианаларның кисешү ноктасы аларның һәркайсын $2:1$ чагыштырмасында бүлгәнен исбатлагыз. Аның өчен A_1 ноктасы аша (AC) на параллель һәм (AB) ын P ноктасында кисүче туры үткәрегез. $|AC_1|=|BP|$, шуңа күрә M ноктасы — C_1P кисемтәсенең уртасы, димәк, $[MN]\parallel(A_1P)$ һәм $|MN|=\frac{1}{2}|B_1C|$ икәнен искәрегез. Ләкин $|A_1P|=|B_1C|\Rightarrow[MN]\parallel[B_1C]$, $|MN|=\frac{1}{2}|B_1C|$.



178 нче рәсем



179 нчы рәсем

Димәк, $|CS|:|SM|=|B_1S|:|SN|=2:1$. Шулай итеп, S — ике өчпочмакның да медианаларының уртак кисешү ноктасы.

§ 2. ОХШАШЛЫК

1. AMC һәм A_0MC_0 охшаш өчпочмакларын карагыз (179 нчы рәсем).

2. 1) ABC өчпочмагы — нигезе AB булган тигезьянлы өчпочмак.

2) ABC өчпочмагы — C почмагы туры булган турыпочмаклы өчпочмак.

3. 36°, 72°, 72°.

4. Тиңдәш яклары параллель булсалар, өчпочмаклар гомотетик була.

5. Өчпочмак тигезьяклы булмаса, мөмкин.

6. Кисә алмый.

7. Ике почмагы буенча.

8. AA_1C һәм BB_1C турыпочмаклы өчпочмакларының охшашлыгыннан $\frac{|A_1C|}{|AC|}=\frac{|B_1C|}{|BC|}$ пропорциясе килеп чыга. Моннан тыш, A_1B_1C һәм ABC өчпочмакларында C почмагы уртак.

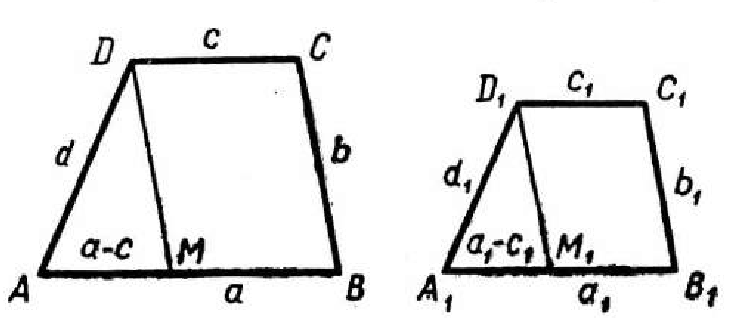
9. AMD һәм BMC өчпочмаклары охшаш, шулай булгач, $|AM|:|MC|=|DM|:|MB|$, димәк, $|AM|\cdot|MB|=|CM|\cdot|MD|$.

10. Бер өчпочмакны 90° ка борыгыз. Бер өчпочмакның почмаклары икенче өчпочмакның почмакларына конгруэнт.

11 4.

12. BHA_1 һәм CAA_1, HAB_1 һәм BCB_1 охшаш өчпочмакларын тикшерегез.

13. Бер пар почмакның, мәсәлән, A һәм A_1 нең конгруэнтлыгын исбатлау җитә (180 нче рәсем): $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{d}{d_1}$.



180 нче рәсем

(CB) һәм (C_1B_1) ларына тиңдәшле рәвештә параллель DM һәм D_1M_1 турыларын төзегез. ADM һәм $A_1D_1M_1$ өчпочмакларында $\frac{d}{d_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a-c}{a_1-c_1}\left(\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}\right.$, шуңа күрә $\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}$ һәм $\frac{a-c}{c} = \frac{a_1-c_1}{c_1}$; $\left.\frac{a-c}{a_1-c_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{d}{d_1}\right)$, димәк, алар охшашлар, $\hat{A} = \hat{A}_1$

14. Әгәр a — турыпочмаклыкның кечерәк ягының озынлыгы булса, кисүче турыпочмаклыкның кечерәк ягына параллель һәм аннан $\frac{a^2}{b}$ ераклыгында тора.

15. 1) Симметрия күчәрләренең һәркайсы турыпочмаклыкны ике конгруэнт һәм, димәк, охшаш турыпочмаклыкка бүлә.

2) Әгәр a — кечерәк ягының озынлыгы булса, a га параллель һәм аннан $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$ ераклыгындагы туры турыпочмаклыкны ике охшаш турыпочмаклыкка бүлә.

Әгәр $b < 2a$ булса, туры юк,

әгәр $b = 2a$ булса, туры бердәнбер була,

әгәр $b > 2a$ булса, ике туры бар.

16. $b^2 = 2a^2$, монда a — кечерәк ягының озынлыгы.

17. $d = \sqrt{ab}$.

18. Бу параллелограммнарның тиңдәш почмакларының конгруэнт булуын һәм якларының пропорциональлеген исбатлагыз.

19. Әйләнәгә камаулы почмакларның үзлекләрен һәм охшаш күппочмакларның билгеләмәсен файдаланыгыз.

20. Охшаш булган турыпочмаклы өчпочмакларның охшаш яклары пропорциональлегеннән файдаланыгыз.

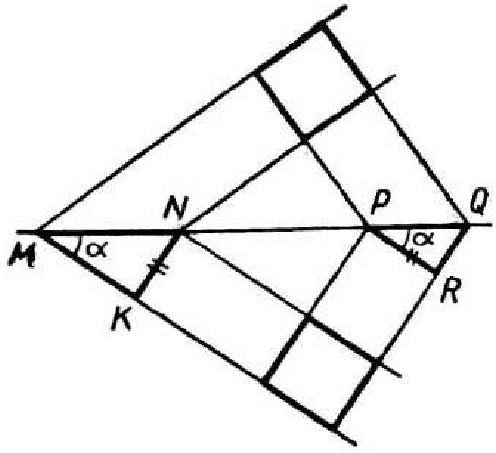
21. Катетның гипотенузага билгеле чагыштырмасы буенча турыпочмаклы өчпочмак төзегез, аннары, турыпочмаклыкның билгеле ягын файдаланып, әлеге турыпочмаклы өчпочмакка гомотетик булганын төзегез.

22. a, b, c турыларын кисүче теләсә нинди туры төзегез һәм бу төзүдә килеп чыккан кисемтәләр чагыштырмасын файдаланыгыз.

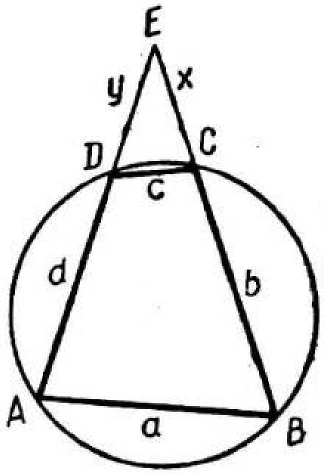
23. a, b, c турыларыннан торган фигурага охшаш фигура төзерлек итеп, $A_0B_0C_0$ өчпочмагының түбәләре аша өч параллель туры: a_0, b_0, c_0 не үткәрегез (22 нче мәсьәләне кара). Аннары, a, b, c фигурасына конгруэнт итеп, a_1, b_1, c_1 турыларыннан торган фигура төзегез, өстәвенә $a \parallel a_0$. Түбәләре берәрләп a_1, b_1, c_1 турыларында яткан $\triangle A_0B_0C_0 \backsim \triangle A_1B_1C_1$ не, аннары, $\triangle ABC \cong A_1B_1C_1$ булырлык итеп, $\triangle ABC$ ны төзисе кала.

24. M һәм N нокталары аша үтүче турылар MN турысына α почмагы ясап авышканнар, монда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|MN|}{|PQ|}$, P һәм Q нокталары аша үтүче турылар аларга перпендикуляр (181 нче рәсем).

25. $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$. Башта a_1, b_1, c_1 яклары буенча эз-



181 нче рәсем



182 нче рәсем

ләнелгәнгә охшаш $A_1B_1C_1$ өчпочмагы төзегез, монда a_1 — ирекле рәвештә алынган кисемтә,

$$b_1 = \frac{a_1h_a}{h_b}, \quad c_1 = \frac{a_1h_a}{h_c}.$$

26. h_c, $\hat{C}$ почмагы һәм $|AD|:|DB| = m:n$ чагыштырмасы бирелгән, монда D — биеклек h_c ның нигезе.

Төзү. 1) l турысы һәм аның өстендә, $|A_1D| = m$, $|DB_1| = n$ булырлык һәм D ноктасы A_1 һәм B_1 нокталары арасында ятарлык итеп, D, A_1 һәм B_1 нокталарын төзегез.

2) C почмагын эченә алган һәм A_1B_1 хордасы белән тартылып торган сегмент төзегез.

3) D ноктасы аша (A_1B_1) на перпендикуляр төзегез. Аның сегмент дугасы белән кисешмәсе C_1 ноктасы була.

4) $k = h_c : |C_1D_1|$ коэффициенты белән $A_1B_1C_1$ өчпочмагына охшаш өчпочмак эзләнелгән өчпочмак була.

27. ABE һәм CDE охшаш өчпочмакларын тикшерегез (182 нче рәсем), димәк, $a:c = (d+y):x = (b+x):y$,

монннан $x = \dfrac{c(bc+ad)}{a^2-c^2}$, $x+b = \dfrac{a(ab+cd)}{a^2-c^2}$. y ны шулай ук табабыз. EC һәм ED кисемтәләрен циркуль һәм линейка ярдәмендә төзергә мөмкин.

28. $|MN| = \dfrac{(a+b-c)c}{a+b+c}$.

Чишү. MCN һәм ACB өчпочмакларының охшашлыгыннан чыгып язабыз:

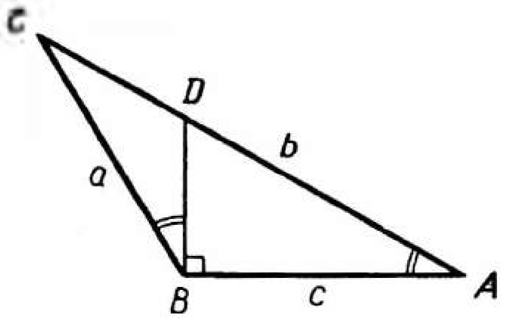
$\dfrac{|MN|}{c} = \dfrac{h_c - 2r}{h_c}$, яки $|MN| = \left(1 - \dfrac{2r}{h_c}\right)c$, монда r — камаулы әйләнәнең радиусы.

Ләкин $pr = \dfrac{1}{2}c \cdot h_c$, ул вакытта $\dfrac{2r}{h_c} = \dfrac{c}{p}$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

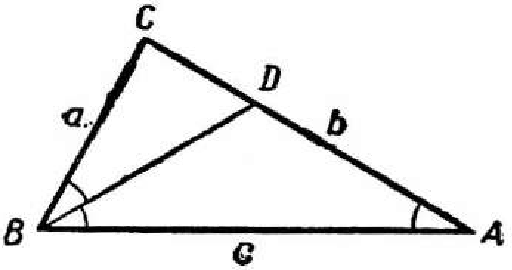
29. $|DK| = |DA| = x$, $|EK| = |EB| = y$ дип тамгалыйк.

$\dfrac{b}{x} = \dfrac{a}{y} = \dfrac{a+b}{x+y}$; $\dfrac{c}{x+y} = \dfrac{b}{b-x} \Rightarrow \dfrac{b}{x} = \dfrac{(a+b)b}{c(b-x)}$, $x(a+b+c) = bc$.

Аналогик рәвештә, $y(a+b+c) = ac$.



183 нче рәсем



184 нче рәсем

30. Түбәндәге факттан ике тапкыр файдаланыгыз: өчпочмак почмагының биссектрисасы капма-каршы якны өчпочмакның янәшә якларына пропорциональ кисәкләргә бүлә.

31. Әгәр Y — биссектрисаларның кисешү ноктасы булса,

$$\frac{|AY|}{|YA_1|}=\frac{b+c}{a},\quad \frac{|BY|}{|YB|}=\frac{a+c}{b},$$

a, b, c — өчпочмакның яклары (29 нчы мәсьәләне кара), ул вакытта $\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}$, $(a-b)(a+b+c)=0$, димәк, $a=b$.

32. $\frac{ah}{a+b}$.

33. $\frac{ch_c}{c+h_c}$.

34. $(b^2-a^2)^2=c^2(a^2+b^2)$.

ABC һәм BDC өчпочмакларының охшашлыгыннан (183 нче рәсем):

$$\frac{a}{CD}=\frac{b}{a}=\frac{c}{|BD|}.\ |CD|=\frac{a^2}{b},\ |BD|=\frac{ac}{b},\ |AD|=\frac{b^2-a^2}{b}.$$

Ләкин $|AD|^2=|BD|^2+|AB|^2$ яки $(b^2-a^2)^2=c^2\ \ (a^2+b^2)$.

35. $[BD]$ — ABC почмагының биссектрисасы (184 нче рәсем). CBD һәм ABC өчпочмакларының охшашлыгыннан:

$$\frac{a}{|CD|}=\frac{c}{|BD|}=\frac{b}{a},\quad |CD|=\frac{a^2}{b},\ |BD|=\frac{ac}{b}.$$

ABD өчпочмагында нигез янындагы почмаклар конгруэнт, шулай булгач, $|BD|=|AD|=b-|CD|$, ул вакытта $b^2-a^2=ac$.

36. $a^2-c^2=ac$ (35 нче мәсьәләне кара).

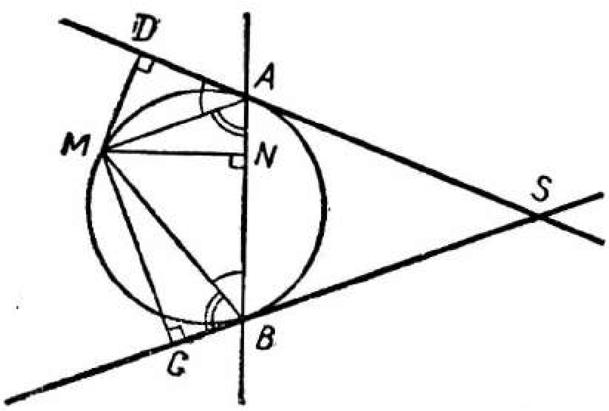
38. $|MN|, |MD|$ һәм $|MC|$ — тиндәшле рәвештә M ноктасыннан AB, SA һәм BS турыларына кадәр ераклыклар (185 нче рәсем).

MAD һәм MBN, MNA һәм MCB өчпочмаклары охшашлар, димәк,

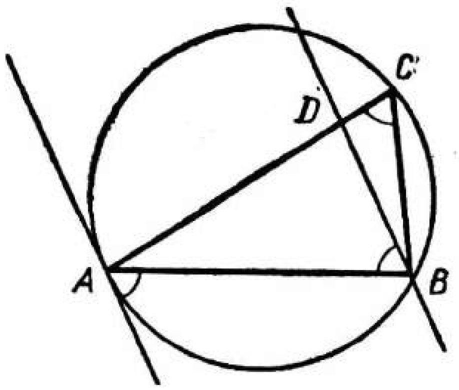
$$\frac{|MD|}{|MN|}=\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{|AD|}{|BN|},\ \text{һәм}\ \frac{|MA|}{|BM|}=\frac{|MN|}{|MC|}=\frac{|NA|}{|CB|},$$

моннан

$$\frac{|MD|}{|MN|}=\frac{|MN|}{|MC|}.$$



185 нче рәсем



186 нчы рәсем

39. Әйләнәгә A, B, C һәм D нокталарында орынмалар үткәрегез һәм 38 нче мәсьәләнең нәтиҗәсен файдаланыгыз.

40. B — әйләнәләрнең берсен икенчесенә чагылдырган охшашлык үзәге, M һәм N — охшашлыктагы тиңдәшле нокталар пары.

41. $2\sqrt{mn}$.

42. Өчпочмаклар охшаш, димәк, $a = ka_1$, $b = kb_1$, $c = kc_1$, $a^2 + b^2 = c^2$, яки $aa + bb = cc$. a, b, c урынына аларның a_1, b_1, c_1 аша күрсәтелгән кыйммәтләрен куеп, $aa_1 + bb_1 = cc_1$ не табабыз.

43. ABC һәм ABD өчпочмакларында (186 нчы рәсем) BAC почмагы уртак, ABD почмагы ACB почмагына конгруэнт, чөнки аларның зурлыклары AB дугасының почмакча зурлыгына тигез. Өчпочмакларның охшашлыгыннан $|AB|^2 = |AD| \cdot |AC|$ икәнлеге килеп чыга.

VI бүлек. БОРУЛАР ҺӘМ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛӘР

1. а) $X_1 = R_0^{18°}(X)$; б) $X_1 = R_0^{-70°}(X)$; в) $X_1 = R_0^{-60°}(X)$; г) $X_1 = R_0^{120°}(X)$; д) $X_1 = R_0^{160°}(X)$.

2. $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

3. а) $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$; в) $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

5. а) $\sin 20° \approx 0{,}34$, $\cos 20° \approx 0{,}94$;

б) $\sin(-75°) = -\sin 75° \approx -0{,}97$, $\cos(-75°) = \cos 75° \approx 0{,}26$;

в) $\sin 100° = \cos 10° \approx 0{,}98$, $\cos 100° = -\sin 10° \approx -0{,}17$;

г) $\sin(-165°) = -\sin 165° = -\sin 15° \approx -0{,}26$, $\cos(-165°) = \cos 165° = -\cos 15° \approx -0{,}97$.

6. а), б) $-\infty < \alpha < +\infty$; в) $\cos\alpha \neq 0$ булган барлык α почмаклары өчен $\operatorname{tg}\alpha$ функциясе билгеләнгән.

7. а), в) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$;

б) $\sin\alpha \leqslant 0$, $\cos\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 0$;

г) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

8. а), в), е), з) уңай, б), г), д), ж), и) тискәре.

9. а) $360° \cdot n$ һәм $180° + 360° \cdot n$, $n \in Z$ (мөмкин булган язылыш: $180° \cdot n$);

б) $90^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in Z$; в) $180^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in Z$;

г) $90^\circ + 360^\circ \cdot n$ һәм $-90^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in Z$ (мөмкин булган язылыш: $90^\circ + 180^\circ \cdot n$);

д) $-90^\circ + 360^\circ \cdot n,\ n \in Z$; е) $360^\circ \cdot n,\ n \in Z$.

11. $|CA| = \cos\alpha,\ |CB| = \sin\alpha,\ |DA| = \cos^2\alpha,$
$|DB| = \sin^2\alpha,\ |CD| = \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$

12. $R\sqrt{3}$. **13.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin 5^\circ$; в) $\cos^2 18^\circ$; г) 1.

14. $\frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} \cdot 1 \cdot \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} \cdot \frac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ} = 1.$

VII бүлек. ӨЧПОЧМАКТА МЕТРИК БӘЙЛӘНЕШЛӘР

1. а) $|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2 - 12 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ}$ см $= \sqrt{9 + 16 - 12}$ см $= \sqrt{13}$ см $\approx 3{,}61$ см.

б) $|AB| = \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 8 \cdot \cos 150^\circ}$ см $= \sqrt{20 + 8}$ см $= \sqrt{28}$ см $\approx 5{,}86$ см.

2. $\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{2}\,ab}$; $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$; $\sqrt{a^2 + b^2}$.

3. $d = \sqrt{4 + 9 - 2 \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ}$ см $= \sqrt{4 + 9 - \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{2}}$ см $=$

$= \sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$ см $\approx \sqrt{13 - 6 \cdot 1{,}414}$ см $\approx \sqrt{13 - 8{,}484}$ см $= \sqrt{4{,}516}$ см $\approx 2{,}12$ см.

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$; $\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

5. а) $\hat{A} \approx 36^\circ 21'$; б) $\hat{C} \approx 26^\circ 23'$.

6. $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 150^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 30^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$. $|BD| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 30^\circ} =$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}}.$$

7. Косинуслар теоремасы буенча:

$$5 = 1 + 2 - 2\sqrt{2}\cos\alpha;\quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \alpha = 135^\circ.$$

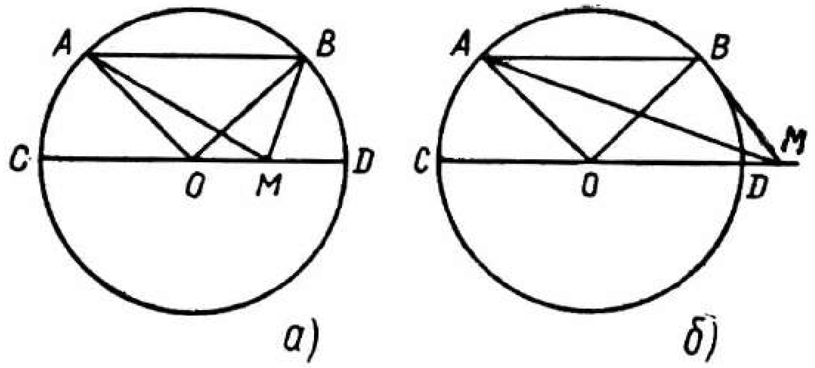
8. $\cos x = 0{,}9899,\ x \approx 8^\circ 9'$.

9. Параллелограммның яклары a һәм b га, ә диагональләре c һәм d га тигез булсын ($c > d$).

Косинуслар теоремасы буенча табабыз:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\cos 45^\circ = a^2 + b^2 + ab\sqrt{2},$$

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos 45^\circ = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2},$$



187 нче рәсем

моннан

$$(cd)^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab\sqrt{2})^2 = a^4 + b^4.$$

10*. $|AM|^2 + |BM|^2 = 2(R^2 + |OM|^2)$ (187 нче рәсем).

а), б) Косинуслар теоремасы буенча BOM өчпочмагыннан һәм AOM өчпочмагыннан табабыз:

$$|BM|^2 = R^2 + |OM|^2 - 2R|OM|\cos\widehat{BOM},$$

$$|AM|^2 = R^2 + |OM|^2 + 2R|OM|\cos\widehat{BOM}.$$

Бу тигезлекләрне буынлап кушып, табабыз:

$$|BM|^2 + |AM|^2 = 2(R^2 + |OM|^2).$$

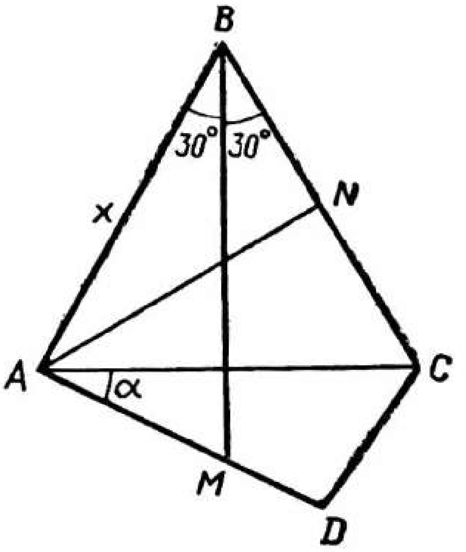
11*. $|AB| = x$ дип тамгалыйбыз (188 нче рәсем) һәм ABC өчпочмагының тигезьяклы икәнен исбатлыйбыз.

ABM өчпочмагыннан табабыз: $AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$, шулай булгач, $\alpha = 30°$.

Косинуслар теоремасы буенча ACD өчпочмагыннан $|CD|$: $|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 - 2|AC|\cdot|AD|\cdot\cos\alpha$ ны табабыз. Моннан $|CD| = \frac{x}{2}$.

Шарт буенча $P = 5 + \sqrt{3}$, ягъни $x=2$.

Шулай итеп, $|AB| = |BC| = 2$, $|AD| = \sqrt{3}$, $|CD| = 1$.



188 нче рәсем

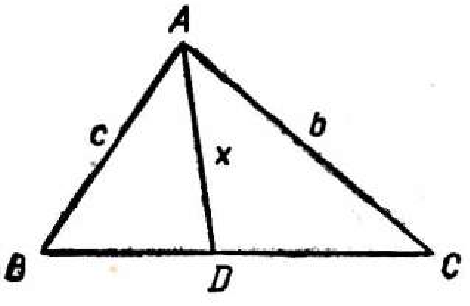
12. Күрсәтмә. Косинуслар теоремасын файдаланып, диагональләрнең квадратларын параллелограммның яклары аша күрсәтегез.

13. а), б) 2 см².

14. $12\sqrt{2}$ см² $\approx 17{,}0$ см². **15.** 4 см².

16. 24 см². **17.** $27\sqrt{2}$ см² $\approx 38{,}2$ см².

18. S_1 һәм S_2 — бирелгән өчпочмакларның мәйданнары булсын. Өчпочмакның мәйданын исәпләү формуласыннан файдаланып табабыз: $S_1 = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$,



189 нчы рәсем

$$S_2 = \frac{1}{2}a_1b_1\sin\beta = \frac{1}{2}a_1b_1\sin(180^\circ - \alpha) = $$
$$= \frac{1}{2}a_1b_1\sin\alpha,$$

моннан $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a \cdot b}{a_1 \cdot b_1}$.

19. $\frac{1}{2}c^2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$.

20. $|CC_1| = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ см $\approx 5{,}3$ см. Күрсәтмә. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACC_1} + S_{\triangle BCC_1}$ тигезлеген файдаланыгыз.

21. $|AD| = x$ дип тамгалыйбыз (189 нчы рәсем). ABC өчпочмагының мәйданы ABD һәм ACD өчпочмакларының мәйданнары суммасына, ягъни $\frac{1}{2}x(b+c)\sin\frac{\hat{A}}{2}$ гә тигез.

$$2S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD} + 2S_{\triangle ACD}; \quad 2S_{\triangle ABC} = bc \cdot \sin\hat{A};$$
$$2S_{\triangle ABD} = cx \cdot \sin\frac{\hat{A}}{2}; \; 2S_{\triangle ACD} = bx \cdot \sin\frac{\hat{A}}{2},$$

моннан $x = \dfrac{bc\sin\hat{A}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$.

22. Күрсәтмә. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\hat{C}$ формуласын файдаланып, күрсәтелгән өчпочмакларның мәйданнарын язып куегыз һәм бу өчпочмакларның мәсьәлә шартында бирелгән мәйданнары суммаларын чагыштырыгыз.

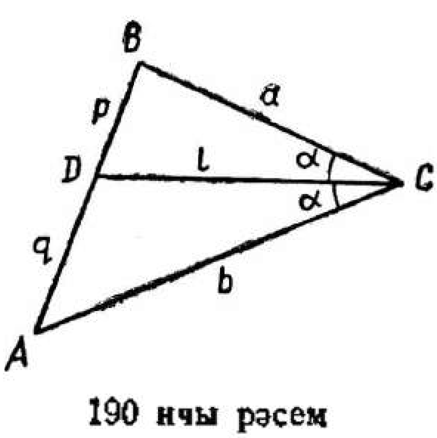
23*. $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ECD}} = \frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|}$.

ABC һәм EDC өчпочмакларының охшашлыгыннан табабыз:

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|EC|},$$

$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|BD| + |DC|}{|DC|} = 1 + \frac{|BD|}{|DC|}$. Ләкин $\frac{|BD|}{|BC|} = a$, $\frac{|BD|}{|BD| + |DC|} = a$, моннан $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{a}{1-a}$. $\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{1}{1-a}$.

Шулай итеп, $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ECD}} = \frac{a}{(1-a)^2}$.

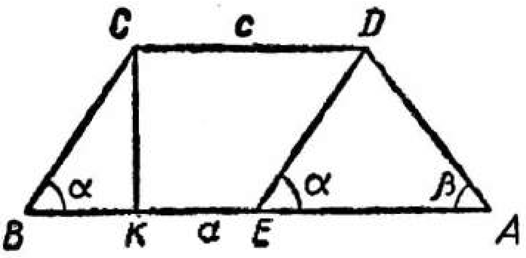


190 нчы рәсем

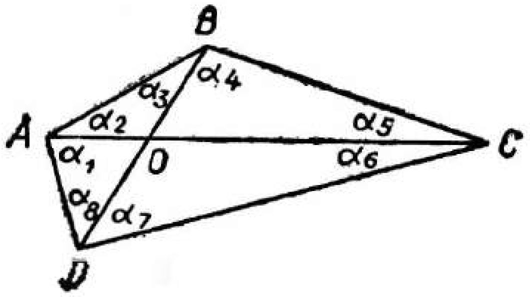
24. а), б) $10\sqrt{2}$ см $\approx 14{,}1$ см.

25. а) $|AB| = 10 \cdot \sin 105^\circ$ см $\approx 9{,}66$ см, $|BC| = 5\sqrt{2}$ см $\approx 7{,}07$ см.

б) $|AB| = 2 \cdot \sin 50^\circ$ см $\approx 1{,}53$ см; $|BC| = 2\sin 100^\circ$ см $\approx 1{,}53$ см.



191 нче рәсем



192 нче рәсем

26. а) $\hat{C} \approx 14°29'$, $\hat{B} \approx 135°31'$; б) $\hat{C} \approx 32°2'$; $\hat{B} \approx 102°58'$.

27. $\frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ һәм $\frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

28. AC ягын a, β һәм γ аша күрсәтәбез.

$$\frac{a}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{|AC|}{\sin \beta}; \ |AC| = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

$\triangle ADC$ дан $\varphi = 90° + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ дип карап, табабыз:

$$\frac{|AD|}{\sin \gamma} = \frac{|AC|}{\sin \varphi}, \text{ моннан } |AD| = \frac{|AC| \sin \gamma}{\sin \varphi}.$$

$AC|$ урынына a, β һәм γ аша аның аңлатмасын куеп, табабыз:

$$|AD| = \frac{a \sin \gamma \sin \beta}{\sin(\beta+\gamma) \cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

29. $\frac{a \sin \beta}{\sin(\beta+\gamma)}$; $\frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$; $\frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin(\beta+\gamma)}$.

30. BCD өчпочмагыннан (190 нчы рәсем) синуслар теоремасы буенча $\frac{p}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin \hat{B}}$ ны, ә ACD өчпочмагыннан $\frac{q}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin \hat{A}}$ ны табабыз.

Моннан $\frac{p}{q} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}}$.

31*. $\frac{(a^2 - c^2) \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha+\beta)}$.

$ADE([DE]) \parallel [BC])$ өчпочмагыннан синуслар теоремасы буенча табабыз (191 нче рәсем):

$$\frac{|DE|}{\sin \beta} = \frac{|EA|}{\sin(\alpha+\beta)}; \ |DE| = \frac{(a-c) \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$\triangle BCK([CK]) \perp [AB]) \text{ дан: } \sin \alpha = \frac{|CK|}{|CB|},$$

моннан $|CK| = \frac{(a-c) \sin \beta \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{(a-c) \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{(a^2-c^2) \sin \beta \cdot \sin \alpha}{2 \sin(\alpha+\beta)}.$$

32. OAD, OAB, OBC, OCD өчпочмакларын карыйбыз (192 нче рәсем). Синуслар теоремасы буенча:

$$\frac{|OA|}{|OD|}=\frac{\sin\alpha_8}{\sin\alpha_1};\quad \frac{|OB|}{|OA|}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3};\quad \frac{|CO|}{|OB|}=\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_5};$$

$$\frac{|OD|}{|OC|}=\frac{\sin\alpha_6}{\sin\alpha_7};\quad \frac{|OB|}{|OA|}\cdot\frac{|OC|}{|OB|}\cdot\frac{|DO|}{|OC|}\cdot\frac{|OA|}{|OD|}=$$

$$=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_3}\cdot\frac{\sin\alpha_6}{\sin\alpha_6}\cdot\frac{\sin\alpha_8}{\sin\alpha_7}=1.$$

33*. Тамгаланышлар кертәбез: $|AK|=a$, ул вакытта $|KF|=\frac{a}{3}$, $|AL|=|LD|=b$, $|CL|=c$, $\widehat{KLA}=\alpha$, $\widehat{KAL}=x$.

Синуслар теоремасы буенча AKL өчпочмагыннан табабыз:

$$\sin x=\frac{c\cdot\sin\alpha}{2a}.$$

$KLDF$ дүртпочмагының мәйданы AFD һәм AKL өчпочмакларының мәйданнары аермасына тигез. $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ALB}$ икәнен искә алып, мәйданнарның эзләнелгән чагыштырмасын табабыз:

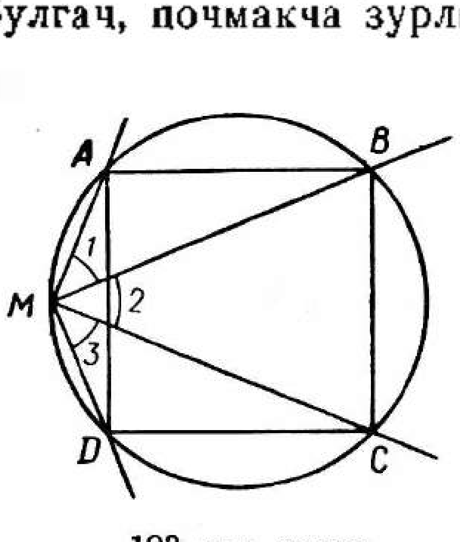
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KLDF}}=\frac{12bc\cdot\sin\alpha}{5bc\cdot\sin\alpha}=\frac{12}{5}=2,4.$$

VIII бүлек. КАМАУЛЫ һӘМ КАМАУЧЫ КҮППОЧМАКЛАР

§ 1. КАМАУЛЫ һӘМ КАМАУЧЫ ӨЧПОЧМАКЛАР

1. 80° яки 100°.
2. 40°, 60°, 80°.
3. 12°25′30″, 12°25′30″, 155°9′.
4. 82°30′, 277°30′.
5. 1) а) 102°; б) 70°; в) 34°; г) 59°; д) 51°.

7. 43 нче теорема нигезендә $\smile AB=\smile DC=\smile CB=\smile AD$, шулай булгач, почмакча зурлыклары тигез дугаларга таянган камаулы почмаклар буларак, 1, 2 һәм 3 почмаклары да конгруэнт була (193 нче рәсем).



193 нче рәсем

8. а) 36°. б) 180°.

9. $[AB]\cong[BC]$ булганлыктан, $\smile AB=\smile BC$ (43 нче теорема нигезендә). AB дугасының почмакча зурлыгын α аша тамгалыйк, ул вакытта $\hat{1}=\alpha$ (194 нче рәсем), чөнки $\angle 1$ — почмакча зурлыгы α га тигез булган дугага таянган үзәк почмак. $\hat{2}=\alpha$, чөнки $\angle 2$ — почмакча

зурлыгы 2α га тигез булган дугага таянган камаулы почмак һәм $[OB] \parallel [CD]$.

10*. A ноктасы аша бирелгән турыга перпендикуляр үткәрәбез. Ул әйләнәне K ноктасында кисеп үтсен ди (195 нче рәсем). Эзләнелгән диаметр кисемтәсе KO нуры өстендә ята.

12. $36°$, $36°$, $108°$.

13. Күрсәтмә. KLM өчпочмагының һәр почмагы ABC өчпочмагының ике почмагы ярымсуммасына тигез.

14. Бирелгән өчпочмакны камаучы әйләнәне карагыз.

17. $[AC] \cap [BD] = P$ булсын. $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ бер үк дугага таянган камаулы почмаклар буларак, ләкин яклары үзара перпендикуляр булган кысынкы почмаклар буларак $\angle ACD \cong \angle KBD$, ягъни $\widehat{ABD} = \widehat{KBD}$.

$\triangle BPK \cong \triangle BPA$, чөнки PB катеты уртак, ABD һәм KBD кысынкы почмаклары конгруэнт һәм $|AB| = |KB|$ булган турыпочмаклы өчпочмаклар (196 нчы рәсем). Яклары үзара перпендикуляр булган почмаклар буларак $\angle AMP \cong \angle ACD$, шулай булгач, $\widehat{AMP} = \widehat{KBP}$, ягъни $[AM] \parallel [BK]$.

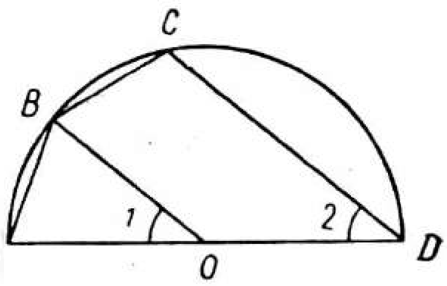
APB һәм APM өчпочмакларының конгруэнтлыгыннан $[AM] \cong [AB]$ икәнлеге килеп чыга, ләкин $|AB| = |BK|$, шуңа күрә $|AM| = |BK|$. Димәк, $AMBK$ дүртпочмагы — параллелограмм, ләкин $|AB| = |BK|$, шуңа күрә $ABKM$ дүртпочмагы — ромб.

19. а) 14,5 һәм 6 см; б) 25 һәм 10 см.

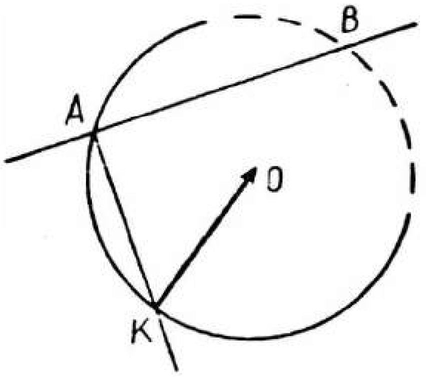
20. 12,5 см.

22. Күрсәтмә. Бу өчпочмакны камаучы әйләнә үткәрегез һәм биссектрисаны әйләнә белән кисешкәнче дәвам итегез.

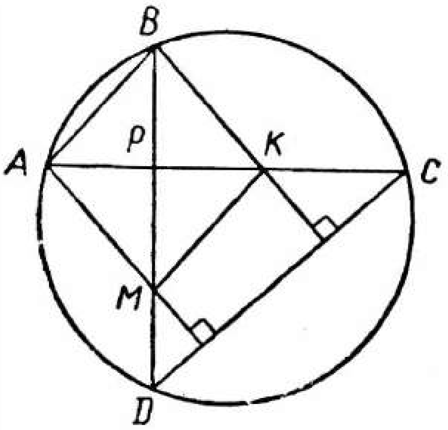
24. $38°$, $52°$.



194 нче рәсем



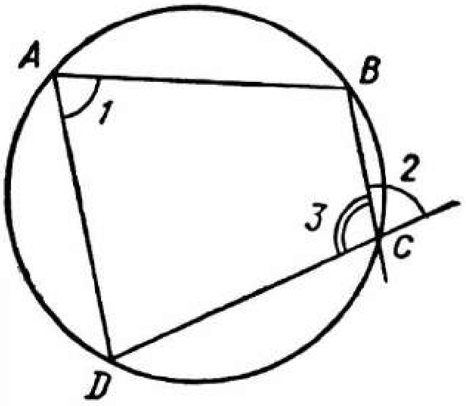
195 нче рәсем



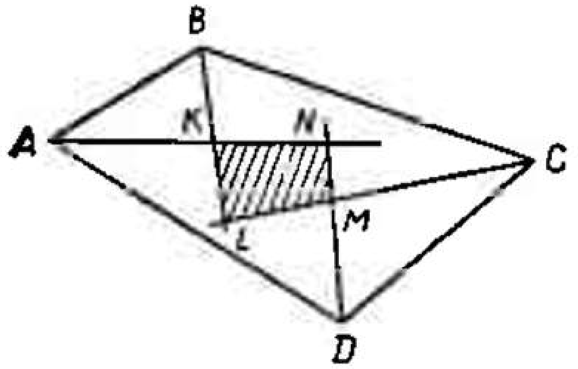
196 нчы рәсем

§ 2. КАМАУЛЫ ҺӘМ КАМАУЧЫ ДҮРТПОЧМАКЛАР

2. Күрсәтмә. $\hat{1} + \hat{3} = 180°$ һәм $\hat{3} + \hat{2} = 180°$ (197 нче рәсем).



197 нче рәсем



198 нче рәсем

3. а) Һәрвакытта да; б) әгәр $\hat{C} = 110°$, $\hat{D} = 78°$ булса.

5. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$. $KNML$ дүртпочмагында (198 нче рәсем) $\hat{L} = 180° - 0,5(\hat{B} + \hat{C})$, $\hat{N} = 180° - 0,5(\hat{A} + \hat{D})$, $\hat{L} + \hat{N} = 180°$, шулай булгач (65 нче теорема), $KNML$ дүртпочмагын камаучы әйләнә үткәрергә мөмкин.

8. AB_1KC_1 дүртпочмагында $\hat{C}_1 = \hat{B}_1 = 90°$, чөнки $[BB_1]$ һәм $[CC_1]$ шарт буенча өчпочмакның биеклекләре, димәк, $[BB_1] \perp [AC]$ һәм $[CC_1] \perp [AB]$. Шулай итеп, $\hat{A} + \hat{K} = 180°$. Шулай булгач (65 нче теорема), AC_1KB_1 дүртпочмагын камаучы әйләнә үткәрергә мөмкин.

10. $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = \hat{D} = 90°$, $\hat{C} = 135°$ булган $ABCD$ дүртпочмагы мәсьәләне канәгатьләндерсен ди. Мәсьәләдә AOB, BOC, COD, DOA почмакларын исәпләү сорала, биредә O — $ABCD$ дүртпочмагына камаулы әйләнәнең үзәге. Камаулы әйләнәнең үзәге почмакларның биссектрисалары кисешү ноктасында ятканлыктан, $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} = 112°30'$, $\widehat{BOC} = \widehat{COD} = 67°30'$.

12. O ноктасы ян як янындагы почмакларның биссектрисалары кисешү ноктасында ята, бу почмакларның суммасы 180° ка тигез, шулай булгач, O ноктасыннан ян як 90° лы почмак белән күренә.

15. 105°.

16. Нигезләре a һәм b $(a > b)$ булган тигезьянлы трапеция R радиуслы әйләнәне камап торсын ди. $|AB| = \frac{a+b}{2}$, $|BK| = h$, $|AK| = \frac{a-b}{2}$ булган турыпочмаклы ABK өчпочмагыннан $|BK|^2 = |AB|^2 - |AK|^2$,

$$h^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}, \text{ моннан } h^2 = ab.$$

§ 3. ТӨЗЕК КҮППОЧМАКЛАР

1. Әйе. 8. 15° яки 75°. 9. 15° яки 105°.

12. Табылган күппочмак төзек дигән гипотеза барлыкка килә. Аның барлык почмаклары конгруэнт һәм һәркайсының зурлыгы 135° ка тигез. Якларының конгруэнтмы икәнен тикшерик. Моның өчен ике чиктәш ягының озынлыклары тигезлеген тикшерү җитә:

$$|BL| = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$|LM| = a - 2a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a(\sqrt{2} - 1),$$

$$|KL| = |BL| \cdot \sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1).$$

Шулай итеп, табылган күппочмак төзек күппочмак була.

15. Күрсәтмә. Башта әйләнәнең радиусын исәпләгез.

18. $a_7 = 2R \sin \frac{360°}{14} \approx 2R \sin 25°43' \approx 2R \cdot 0{,}4340 = 0{,}868R.$

$$|BK| = \frac{R\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866\,R.$$

Хата якынча $0{,}002R$ га тигез, чагыштырма хата $\approx 0{,}23\ \%$ тәшкил итә.

19. $a^2(1 + \sqrt{2}) \approx 2{,}41a^2$.

§ 4. ӘЙЛӘНӘ ОЗЫНЛЫГЫ ҺӘМ ТҮГӘРӘК МӘЙДАНЫ

6. $r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$, монда $r = R\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$. **8.** 25π бер^2.

9. а) ≈ 105 см^2; б) ≈ 314 см^2.

12. $25(1 - 0{,}25\pi)$ см$^2 \approx 5{,}4$ см^2 яки $25(1 + 0{,}75\pi)$ см$^2 \approx 41{,}1$ см^2.

13. $S_1 \approx 1{,}28\,a^2$, $S_2 = S_3 \approx 0{,}28\,a^2$, $S_4 = 0{,}43\,a^2$.

S_2 — радиусы a булган ярымтүгәрәк мәйданы белән AB диагональле квадрат мәйданының яртысы аермасы.

14. а) $\frac{\pi d^2}{16}$. б) $\frac{\pi d^2}{4n}$. **15.** $\approx 2{,}14\,R^2$.

18. а) $\frac{7\pi}{6}a$, $\frac{a^2}{48}(19 - 12\sqrt{3})$; б) $2\pi a$, $0{,}5a^2(\pi - 2)$; в) $0{,}5(\pi a + \pi b + 4\sqrt{a^2 + b^2})$; $0{,}25(\pi a^2 + \pi b^2 + 4ab)$; г) $2\pi a(1 + \sqrt{2};)\ 2a^2$.

IX бүлек. СТЕРЕОМЕТРИЯДӘН БАШЛАНГЫЧ МӘГЪЛҮМАТЛАР

§ 1. ПРОСТРАНСТВОДА НОКТАЛАРНЫҢ, ТУРЫЛАРНЫҢ ҺӘМ ЯССЫЛЫКЛАРНЫҢ ҮЗАРА ТОРЫШЫ

1. 28. Күрсәтмә. Кубның сигез түбәсеннән нокталарның төрле $\frac{8 \cdot 7}{2}$ парын төзергә мөмкин.

2. 20 яссылык. Күрсәтмә. Кубның сигез түбәсен өчәрләп 56 төрле группаларга мөмкин. Ләкин бу саннан төрле яссылыкларны билгеләгән өчлекләрне генә алырга кирәк.

3. Бер, алты, сигез, тугыз, ун, унбер, унөч, унбиш туры.

4. Бер, биш, җиде, ун яссылык.

5. Күрсәтмә. Карала торган яссылыкларның һәркайсында яткан ике нокта аша үтүче туры тулысынча бу яссылыкларның һәркайсында да ятар (яссылык һәм туры аксиомасы буенча).

Димәк, төрле ике яссылыкның ике уртак ноктасы булса, аларның бу нокталар аша үтүче уртак турысы да бар.

6. а) 12 туры. б) 4 туры (AB турысын кертеп).

7. а) A_1B_1, D_1C_1, BB_1, CC_1 кабыргалары. б) A_1B_1 кабыргасы.

8. 12 туры: LM, K_1N_1, MN, K_1L_1, L_1N_1, LN, LK_1, L_1M, MN_1, NK_1, NN_1, LL_1.

9. 9 пар төрле параллель яссылыклар (шуларның 3 пары кубның ян кырлары яткан яссылыкларны бирәләр).

10. 9 яссылык.

11. A ноктасы аша a һәм b турыларын кисүче ике туры уза дип уйлыйк. Ул вакытта A ноктасында кисешүче бу ике туры бердәнбер α яссылыгын билгелиләр. Безнең уйлавыбыз буенча, бирелгән a һәм b турыларының һәр үткәрелгән туры белән уртак нокталары бар, һәм бу нокталар төрле. Моннан a турысы кебек үк b турысының да α яссылыгында ятуы килеп чыга. Ләкин шарт буенча бу турылар — чалышма турылар. Каршылыкка очрадык. Димәк, A ноктасы аша бирелгән a һәм b турыларын кисүче ике туры уза алмый.

12. Күрсәтмә. 1) Әгәр b турысы a турысы белән α яссылыгының кисешү ноктасы M аша үтсә, $a \neq b$ була.

2) $b \cap a = \varnothing$ булсын. $a \parallel b$ дип уйлыйк. Ул вакытта a һәм b турылары α яссылыгы белән уртак ноктасы (M) булган бер үк β яссылыгында яталар. Ләкин b турысы белән M ноктасы бердәнбер α яссылыгын билгелиләр. Шулай булгач, α һәм β яссылыклары тәңгәл киләләр. Ләкин a турысының α яссылыгында ятуы мөмкин түгел, чөнки шарт буенча турының ул яссылык белән бер генә уртак ноктасы бар. Каршылыкка очрадык. Шулай булгач, $a \nparallel b$.

13. 1) α яссылыгында ниндидер a турысы үткәрәбез. a турысы белән M ноктасы бердәнбер β яссылыгын билгелиләр.

2) β яссылыгында M ноктасы аша $a \parallel b$ турысы үткәрәбез.

3) $a \subset \alpha$; $b \parallel a$. Димәк, $b \parallel \alpha$.

4) Төзүдән шул килеп чыга: M ноктасы аша үтүче һәм α яссылыгында яткан нинди дә булса турыга параллель булган теләсә нинди туры α яссылыгына да параллель була.

14. а) 10 туры. б) 16 туры.

15. 1) а) Перпендикулярның нигезе T аша узалар. б) T ноктасы аша үтмиләр.

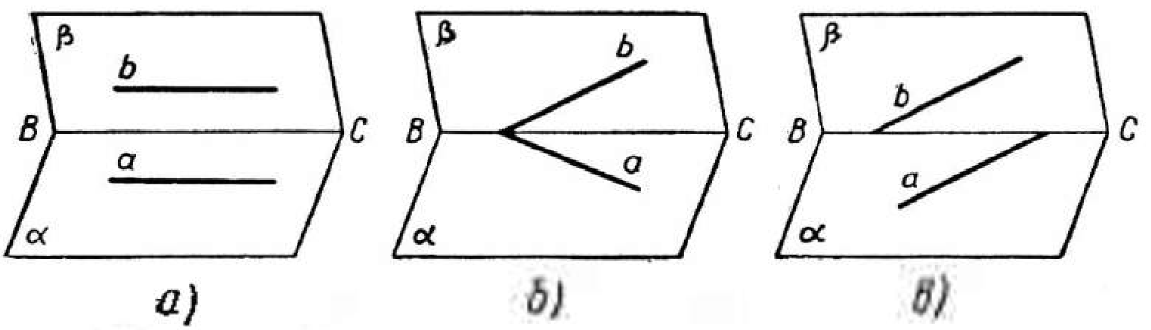
2) α яссылыгында андый туры юк.

16. а) $|DA|$. б) $|DT|$. в) $|CM|$ ($M = [BD] \cap [KT]$. г) $|DA|$. д) $|DC|$. е) $|DO|$ ($[DO] \perp [AC_1]$, $O \in AC_1$). ж) $|DO_1|$ ($O_1 = [B_1D_1] \cap [A_1C_1]$).

17. Өч очракта да мөмкин (199 нчы рәсем).

18. а) б) очраклары мөмкин. в) очрагы мөмкин түгел.

19. Күрсәтмә. Бер үк l турысына перпендикуляр булган α һәм β яссылыкларының уртак нокталары T булса, ул ноктадан l турысына ике перпендикуляр үткәреп була, ә бу мөмкин түгел.



199 нчы рәсем

20. Күрсәтмә. Әгәр бирелгән турылар ниндидер M ноктасында кисешсәләр, ул вакытта әлеге ноктадан яссылыкка ике перпендикуляр үткәрелгән була, ә бу мөмкин түгел.

21. а) Чиксез күп турылар күплеге, ул турыларның һәркайсы M ноктасы аша β яссылыгына үткәрелгән перпендикулярның нигезе аша үтә.

б) Чиксез күп турылар күплеге, ул турыларның һәркайсы M ноктасы аша β яссылыгына үткәрелгән перпендикулярның нигезе — үзәге булган бер үк әйләнәгә орыналар.

22. а) Берсе генә a турысына параллель булган чиксез күп турылар күплеге. (Ул туры a турысының нокталары аша α яссылыгына үткәрелгән перпендикулярларның нигезләре аша үтә.)

б) a турысына параллель булган ике туры.

23. а) һәм б) очраклары мөмкин. в) очрагы мөмкин түгел.

24. Әгәр $a \parallel \alpha$ булса.

25. а) һәм б) очраклары мөмкин. в) очрагы мөмкин түгел.

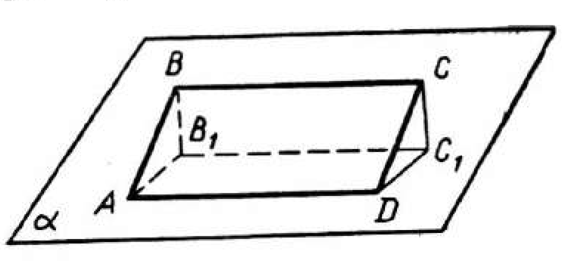
26. Күрсәтмә. а) Параллелограммның бер ягы капма-каршы ягы яткан турыга проекцияләнсә, проекция кисемтә була. б) Исбатлау ике өлештән тора.

1. BCC_1B_1 дүртпочмагы — турыпочмаклык. Шулай булгач, $[BC] \parallel [B_1C_1]$, $[BC] \cong [B_1C_1]$ (200 нче рәсем).

2. AB_1C_1D дүртпочмагы — параллелограмм, чөнки $[AD] \parallel [B_1C_1]$ һәм $[AD] \cong [B_1C_1]$.

27. а) һәм b) очраклары мөмкин. б) очрагы мөмкин түгел.

28. Әйләнә яткан яссылык проекция яссылыгына параллель булган очракта.



200 нче рәсем

§ 2. КАЙБЕР ҖИСЕМНӘРНЕҢ ӨСЛЕК МӘЙДАНЫ ҺӘМ КҮЛӘМЕ

1. 1. $V = \frac{a^2 h\sqrt{3}}{4}$. а) ≈ 87 см^3; б) $\approx 0{,}024$ м^3.

2. $S_{\text{як}} = 3ah$. 1) 120 см^2; 2) $\approx 0{,}68$ м^2.

3. $S = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. 1) ≈ 143 см^2; 2) $\approx 0{,}73$ м^2.

2. $V = abh \sin\alpha$; ≈ 123 м^3. $S = 2h(a+b) + 2ab\sin\alpha$; ≈ 191 м^2.

3. Күрсәтмә. Куелган шарт буенча нигезенең мәйданы зуррак булган төзек призманың күләме зуррак булыр. Бирелгән периметрны P аша тамгалыйк. Ул вакытта

$$a_3=\frac{P}{3};\quad a_4=\frac{P}{4};\quad a_6=\frac{P}{6}.$$

Тиңдәшле рәвештә нигез мәйданнары

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{3}\right)^2\sin 60^\circ;\ \left(\frac{P}{4}\right)^2;\ 6\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{P}{6}\right)^2\sin 60^\circ$$

ка тигез. Хәзер мәйданнарны чагыштыру түбәндәге саннарны чагыштыруга кайтып кала.

$$\frac{\sqrt{3}}{36};\ \frac{1}{16};\ \frac{\sqrt{3}}{24};\ S_3<S_4<S_6;\ \text{моннан}\ V_3<V_4<V_6.$$

4. Күрсәтмә. Призманың нигезендә камаучы дүртпочмак ятуын истә тотарга кирәк. Призма нигезенең мәйданы $\frac{1}{2}Pr$ га тигез.

1) $V=\frac{1}{2}Prh$; 400 дм^3.

2) $S=P(h+r)$; 520 дм^2.

5. а) $V=\frac{3r^3\sqrt{3}}{2}$; ≈ 561 м^3, ≈ 21 м^3; $S=\frac{9r^2\sqrt{3}}{2}$; ≈ 280 м^2; ≈ 31 м^2.

б) $V=4r^3$; ≈ 864 м^3; ≈ 32 м^3; $S=4r^2(1+2\sqrt{2})$; ≈ 550 м^2, ≈ 61 м^2.

в) $V=3r^3\sqrt{3}$, ≈ 1121 м^3, ≈ 42 м^3; $S=3r^2(4+\sqrt{3})\approx 619$ м^2, ≈ 69 м^2.

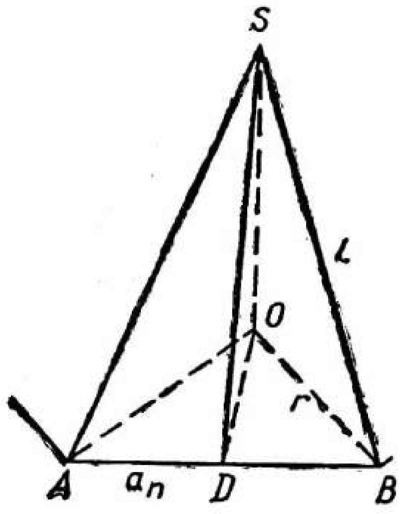
6. $V=\frac{(a+b)hl}{2}$; 140 м^3.

8. а) Әйе, мөмкин.

б) Күрсәтмә. Андый куб кабыргасының озынлыгы $x^3=6x^2$ тигезләмәсеннән табыла.

9. Өч өчпочмаклы пирамидага.

10. Өч дүртпочмаклы пирамидага.



201 нче рәсем

11. Күрсәтмә. SAB — биеклеге SO һәм нигез ягы AB булган n-почмаклы пирамиданың ян кыры булсын, $|AB|=a_n$ (201 нче рәсем).

а) BOD өчпочмагыннан табабыз:

$$|OB|=r=\frac{a_n}{2};\ \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

SOB өчпочмагыннан табабыз: $l=a_n>r$, ягъни $\frac{a_n}{\frac{a_n}{2}}\sin\frac{180^\circ}{n}>1$, моннан $\sin\frac{180^\circ}{n}>\frac{1}{2}$.

Тигезсезлек n 3 кә, 4 кә, 5 кә тигез булганда үтәлә.

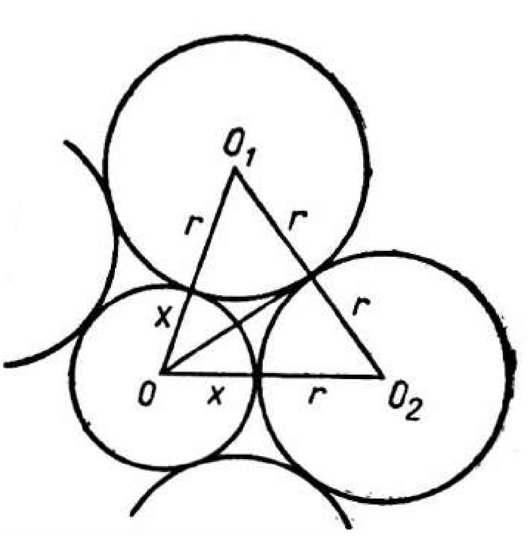
б) BOD өчпочмагыннан табабыз:

$$|OD| = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

SOD өчпочмагыннан күренгәнчә, $|SD| > |OD|$.

Әгәр $|SD| = a_n$ булса, $\frac{a_n}{\frac{a_n}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} > 1$,

яки $\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} > \frac{1}{2}$.



202 нче рәсем

Тигезсезлек n 3 кә, 4 кә, 5 кә, 6 га тигез булганда үтәлә.

12. $V = \frac{nr^2h}{6}\sin\frac{360^\circ}{n}$; $S = nr\sin\frac{180^\circ}{n}\sqrt{h^2 + r^2\cos^2\frac{180^\circ}{n}}$.

13. $V = \frac{\pi a^3}{4\operatorname{tg}^3\frac{180^\circ}{n}}$; $S = \frac{3\pi a^2}{2\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}$.

14. $V = \pi ab(a + 2t)$. Күрсәтмә. Мәсьәләне чишү ике цилиндрның күләмнәре аермасын табуга кайтып кала.

15. $\frac{\pi r^2 h}{2}$. Күрсәтмә. Нигезе һәм биеклеге шул ук булган цилиндр килеп чыгарлык итеп, ике цилиндрик тоякның берсен икенчесе өстенә салырга мөмкин.

16. Күрсәтмә. l төзүчесенең нигез яссылыгына проекциясе r дан зуррак.

а) $l > \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

б) l ның андый кыйммәтләре n 3 кә, 4 кә, 5 кә, 6 га тигез булганда мөмкин.

17. $V = \frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}$; $S = \frac{3}{4}\pi a^2$.

18. Күрсәтмә. Күләм — әйләндерү нәтиҗәсендә килеп чыккан цилиндр һәм конусның күләмнәре аермасы буларак табыла:

$$V = \pi a^2 h - \frac{\pi(a - b)^2 h}{3}.$$

19. Күрсәтмә. Чишү түгәрәкләр өчен аналогик мәсьәлә чишүгә кайтарып калдырыла. Андый шарның радиусы кыйммәте $x(r + x)\sin\frac{180^\circ}{n} = r$ тигезләмәсеннән табыла (202 нче рәсем).

21. $V = 2\pi^2 r^2 t$.

КЛАССТАН ТЫШ ҺӘМ ИНДИВИДУАЛЬ ЭШЛӘР ӨЧЕН МӘСЬӘЛӘЛӘР

§ 1. КҮЧӘРЛЕ СИММЕТРИЯ. КҮЧӘРЛЕ СИММЕТРИЯЛӘРНЕҢ КОМПОЗИЦИЯСЕ

1. a һәм b турылары O ноктасында кисешсеннәр ди. O үзәкле концентрик ике әйләнә төзегез. Бирелгән турылар белән билгеләнгән почмакларның берсенең ягы өстендә әйләнәләр белән кисешүдән дүрт нокта: A_1 һәм A_2, B_1 һәм B_2 не табабыз. A_1B_2 һәм A_2B_1 кисемтәләре кайсыдыр M ноктасында кисешәләр. OM турысы — симметрия күчәре. Шул ук әйләнәләр ярдәмендә икенче күчәр төзелә.

2. p га карата a га симметрияле a' турысын төзегез, $a' \cap b = B$. **3.** $A' = S_p(A)$; $(A'B) = b$ ны төзегез.

4. Ике билгеле ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча ярдәмче өчпочмак төзегез, аннары өченче якка үткәрелгән урта перпендикулярга карата симметрияне кулланыгыз. Бирелгән почмак яки аңа чиктәш почмак алына.

5. 4 нче мәсьәләгә күрсәтмәне карагыз.

6. 1) Бер әйләнәнең теләсә нинди диаметрын һәм икенче әйләнәнең аңа перпендикуляр диаметрын төзегез.

2) Кечерәк әйләнәнең AB диаметрын зуррак әйләнә белән кисешкәнче дәвам итегез. AC һәм BC кисемтәләренең симметрия күчәрләрен төзегез.

7. Бишпочмакның симметрия күчәре түбә һәм аңа каршы яткан якның уртасы аша үтә.

Әгәр $ABCDE$ бишпочмагының симметрия күчәре A түбәсен эченә алса, ул вакытта $|AB| = |AE|$, $|BC| = |DE|$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{D}$. Тагын бер күчәр алыгыз һәм тиңдәшле тигезлекләрне языгыз. Бишпочмакның төзек икәнен исбатлагыз.

8. Юк. 1) Тигезпочмаклы (203 нче рәсем); 2) тигезьяклы.

9. a_1, a_2, a_3 $(a_1 \cap a_2 \cap a_3 = O)$ күчәрләре булган симметрияләр бирелсен ди. Теләсә нинди A ноктасы өчен: $S_{a_1}(A) = A_1$, $S_{a_2}(A_1) = A_2$, $S_{a_3}(A_2) = A_3$, өстәвенә $|OA| = |OA_1| = |OA_2| = |OA_3|$, чөнки $S_{a_3} \circ S_{a_2} \circ S_{a_1}(O) = 0$.

Күчәрле өч симметриянең композициясе $O \to O$, $A \to A_3$ күчә торган икенче төр күчү була. Күчүләр турындагы аксиома буенча тиңдәшле нокталарның ике пары белән икенче төр[1] күчү беркыйммәтле билгеләнә. O — кузгалмас нокта, шуңа күрә бу — O ноктасы аша үтүче AA_3 кисемтәсенең урта перпендикулярына карата күчәрле симметрия була.

10. a, b, c — бирелгән симметрияләрнең күчәрләре булсын (204 нче рәсем). $A_1 = S_a(A)$ ноктасын төзибез. Симметрияләрнең композициясе $\delta = S_c \circ S_b \circ S_a A_1$ ноктасын A ноктасына чагылдыра. Әгәр

[1] Ориентациясен үзгәртми торган күчү беренче төр күчү дип атала; әгәр ул ориентациясен үзгәртсә, икенче төр күчү дип атала.

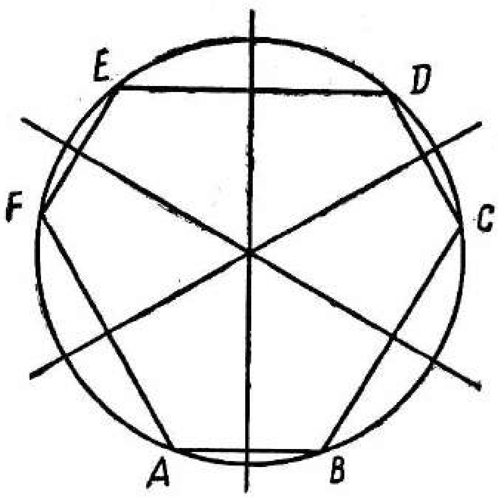
δ — күчәрле симметрия булса, аның күчере a турысы белән тәңгәл килә, димәк, a турысының нокталары δ ның кузгалмас нокталары, атап әйткәндә, $\delta(B)=B$. Ләкин $S_c \circ S_b \circ S_a(B) = S_c \circ S_b(B) \neq B$, чөнки $S_c \circ S_b$ боруы B ноктасы белән тәңгәл килмәгән A ноктасын гына үзенә чагылдыра. Шулай итеп, δ — күчәрле симметрия түгел.

11. $S_{l_C} \circ S_{l_B} \circ S_{l_A}(A) = S_{l_C} \circ S_{l_B}(A) = S_{l_C}(A') = A''$ ны карагыз, өстәвенә $A' \in (BC)$, $A'' \in (AC)$. Аннан соң 9 нчы мәсьәләне карагыз.

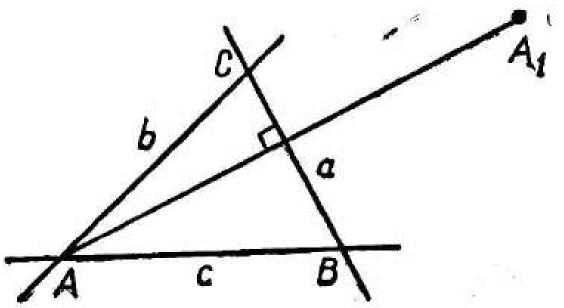
12. $S_p \circ S_n \circ S_m(B) = S_p \circ S_n(C) = S_p(A) = B$, 9 нчы мәсьәләне карагыз.

13. ABC өчпочмагының (BC), (CA), (AB) на параллель булган урта сызыкларын эченә алган турыларны тиңдәшле рәвештә p_1, q_1, r_1 аша тамгалыйк, ул вакытта

$$S_r \circ S_q \circ S_p(q_1) = S_r \circ S_q(r_1) = S_r(p_1) = q_1.$$



203 нче рәсем



204 нче рәсем

14. $\widehat{C_1A_1A} = \widehat{AA_1B_1}$, $\widehat{A_1B_1B} = \widehat{BB_1C_1}$, $\widehat{B_1C_1C} = \widehat{CC_1A_1}$ икәнен исбатлагыз.

15. Күчәрле симметрияләрнең композициясе $S_r \circ S_q \circ S_p$ t күчәрле симметрия була һәм $S_r \circ S_q \circ S_p(A) = A \Rightarrow S_t(A) = A$, ягъни $A \in t$. $\widehat{(p, q)} = \widehat{(t, r)}$ икәнен исәпкә алып, t турысы төзегез. t турысының теләсә нинди ноктасы A түбәсе булып хезмәт итә ала.

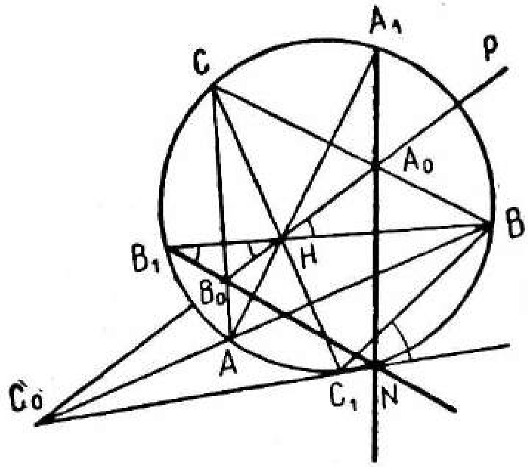
16. Әйләнәнең үзәге аша, бирелгән турыларга перпендикуляр итеп, өч туры үткәрегез. 15 нче мәсьәләнең нәтиҗәсеннән файдаланыгыз.

17. ABC өчпочмагында биеклекләренең кисешү ноктасы H аша p турысы үткәрәбез (205 нче рәсем). $p \cap (AB) = C_0$, $p \cap (BC) = A_0$, $p \cap (CA) = B_0$ булсын. ABC өчпочмагының якларына карата H ноктасына симметрик булган C_1, B_1, A_1 нокталарының өчпочмакны камаучы әйләнәнеке икәнен исбатлагыз. Димәк, S_a симметриясе p ны (A_1A_0) на чагылдыра, S_b симметриясе p ны (B_1B_0) на һәм S_c симметриясе p ны (C_1C_0) на чагылдыра.

$(C_0C_1) \cap (B_0B_1) = N$ булсын.

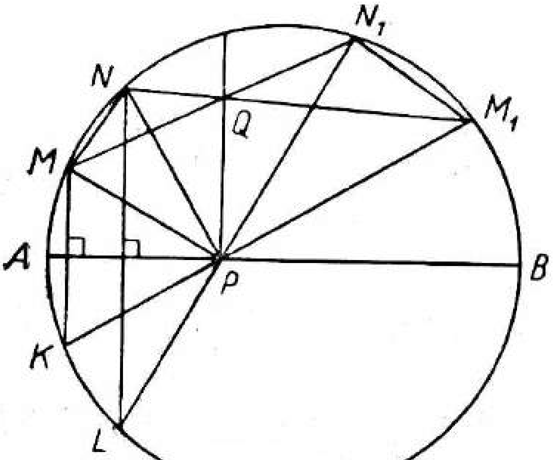
$\widehat{NC_1B} = \widehat{BHA_0} = \widehat{B_0HB_1} = \widehat{B_0B_1H} \Rightarrow \widehat{NC_1B} = \widehat{B_0B_1B}$ икәнен искәрәбез. Шулай ук $\widehat{NC_1B}$ һәм $\widehat{B_0B_1B}$ почмакларының суммасы 180° ка тигез булуы мөмкин. Димәк, BB_1C_1N дүртпочмагын камаучы әйләнә үткәреп була, ягъни C_1C_0 һәм B_1B_0 турылары ABC өчпочмагын камаучы әйләнә өстендә кисешәләр.

A_1A_0 һәм B_1B_0 турыларының әйләнә өстендә кисешүләрен аналогик рәвештә исбат итәргә мөмкин, димәк, A_1A_0, B_1B_0 һәм C_1C_0 турылары бер ноктада кисешәләр.



205 нче рәсем

18. (AB) на карата M һәм N ноктaларына тиңдәшле рәвештә симметрик булган K һәм L нокталары төзегез (206 нчы рәсем), K, P, M_1, шулай ук L, P, N_1 нокталары турылар өстендә яталар. PQN_1M_1 дүртпочмагын камаучы әйләнә үткәрергә мөмкин, димәк, $\widehat{QPN_1} = \widehat{N_1M_1Q}$, я аларның суммасы 180° ка тигез. Аннары шул ук үзлеккә ия булган $PQNM$ дүртпочмагын карагыз: $\widehat{NPQ} = \widehat{NMQ}$. NMQ һәм N_1M_1Q почмакларының конгруэнтлыгыннан $\widehat{NPQ} = \widehat{N_1PQ}$ һәм $[PQ] \perp [AB]$ икәнлеге килеп чыга.



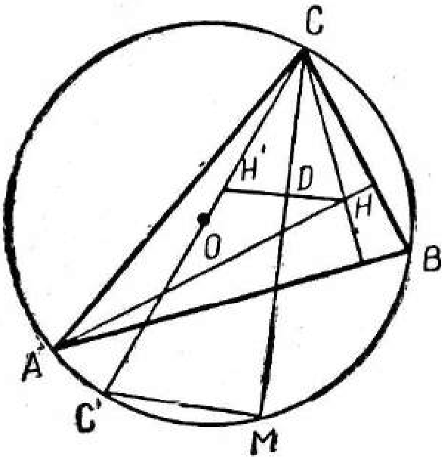
206 нчы рәсем

19. $(DH) \cap (CO) = H'$ (207 нче рәсем), ә $C'C$ га диаметраль капма-каршы булсын. CH һәм CO нурлары (CM) на карата симметрик, димәк,

$$|CD|:|CM| = |CH'|:|CC'| = |CH|:$$
$$:|CC'| = 2R|\cos \hat{C}|:2R = |\cos \hat{C}|.$$

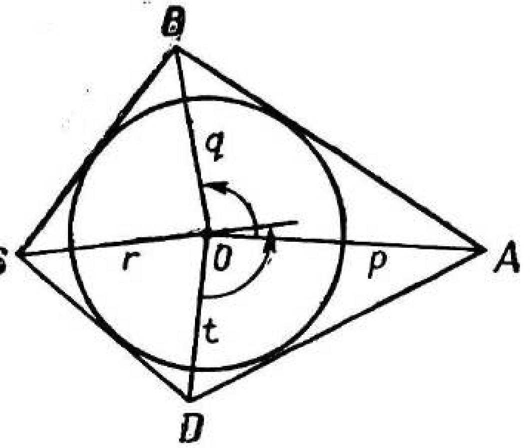
20. Дүртпочмак — тигезьянлы трапеция. AB һәм CD нигезләренең уртасы аша үтүче туры симметрия күчәре була.

21. Әгәр $(OM) = p$, $(ON) = q$, $(OP) = r$, $(OQ) = t$ булса, $\sigma = S_t \circ \circ S_r \circ S_q \circ S_p$ бердәй күчү була, чөнки $\sigma(O) = O$, $\sigma(A) = A$. Димәк, $S_q \circ S = S_p \circ S_p$ яки $(\widehat{p, q}) = (\widehat{t, r})$.

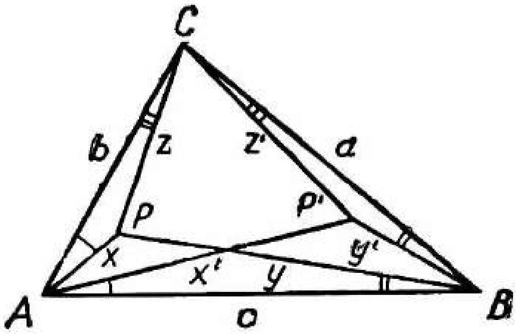


207 нче рәсем

22. $\delta = S_t \circ S_r \circ S_q \circ S_p$ (монда p, q, r, t — дүртпочмакның почмаклары биссектрисаларын эченә алган турылар) композициясен карагыз. $\delta(AD) = (AD)$, $\delta(O) = O$ булганлыктан, δ — бердәй үзгәртү һәм $S_q \circ \circ S_p = S_r \circ S_t$; димәк, $(\widehat{p, q}) = (\widehat{t, r}.)$ Шулай булгач, $\widehat{COD} + \widehat{AOB} = 180°$ (208 нче рәсем).



208 нче рәсем



209 нчы рәсем

23. x, y, z турылары бер тезмәнеке, димәк, $S_y \circ S_z \circ S_x = S_t$ (209 нчы рәсем). Пар почмакларның тигезлеген исәпкә алып, язабыз:

$$S_b \circ S_x = S_{x_1} \circ S_c, \; S_c \circ S_y = S_{y_1} \circ S_a, \; S_a \circ S_{z_1} = S_z \circ S_b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_x = S_b \circ S_{x_1} \circ S_c, \; S_y = S_c \circ S_{y_1} \circ S_a, \; S_z = S_a \circ S_{z_1} \circ S_b.$$
$$S_y \circ S_z \circ S_x = S_c \circ S_{y_1} \circ S_a \circ S_a \circ S_{z_1} \circ S_b \circ S_b \circ S_{x_1} \circ S_a =$$
$$= S_t \circ S_c \circ S_{y_1} \circ S_{z_1} \circ S_{x_1} \circ S_c = S_t \Rightarrow S_{y_1} \circ S_{z_1} \circ S_{x_1} = S_c \circ S_t \circ S_c = S_p.$$

24. Әгәр күчүнең кузгалмас нокталары булмаса, аның квадратының да кузгалмас нокталары юклыгына ышанабыз.

f күчүенең кузгалмас нокталары булмасын ди. Шулай да $f \circ f(M) = M$. Ләкин мондый очракта табабыз: $f^{-1}(M) = f(M) = N$. Шулай итеп, $f(M) = N$; $f(N) = M$, димәк, MN кисемтәсенең уртасы — кузгалмас нокта, ә моның булуы мөмкин түгел.

BC, CA һәм AB турыларын тиңдәшле рәвештә a, b һәм c дип тамгалыйк. $\delta = S_c \circ S_b \circ S_a \circ S_c \circ S_b \circ S_a$ композициясен карыйбыз. Күчәрләре өчпочмак биргән күчәрле өч симметриянең композициясе $S_c \circ S_b \circ S_a$ ның кузгалмас нокталары юк, шулай булгач, δ — күчерү.

25. 9 нчы мәсьәләнең нәтиҗәсеннән файдаланыгыз.

26. Турыпочмаклыкның теләсә кайсы диагоналенә параллель.

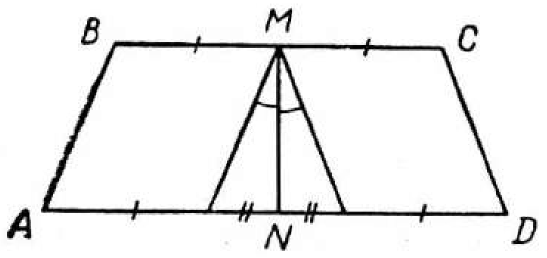
§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬ КҮЧЕРҮ ҺӘМ ҮЗӘКЛЕ СИММЕТРИЯ. БОРУ

1. a (яки b) турысының d турысына параллель юнәлештә бирелгән ераклыкка күчергәндәге образын карагыз.

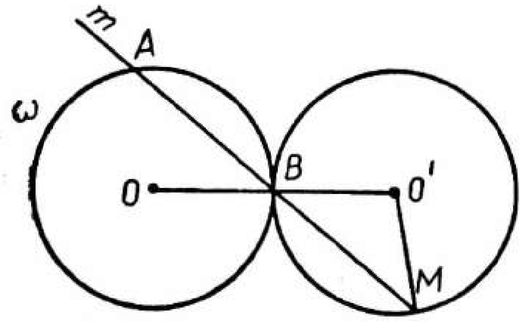
2. $T_{\overrightarrow{CD}}(B) = B'$, E — AB' кисемтәсенең уртасы булсын. A, B, C, D нокталары аша (BE) на параллель турылар үткәрегез.

3. $(BC) \parallel (AD)$ булсын. $\overrightarrow{AD}$ күчерүендә AC диагоналенең образын карагыз.

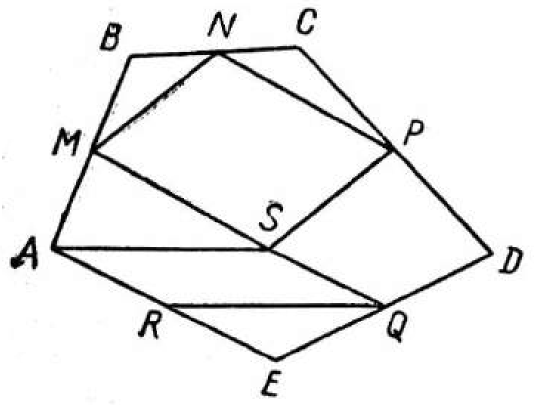
4. $(BC) \parallel (AD)$ булсын. $\overrightarrow{BM}$ һәм $\overrightarrow{CM}$ күчерүләрендә AB һәм CD кисемтәләренең образларын карагыз. Килеп чыккан өчпочмакның биссектрисасы бер үк вакытта медиана да булуын исбатлагыз (210 нчы рәсем).



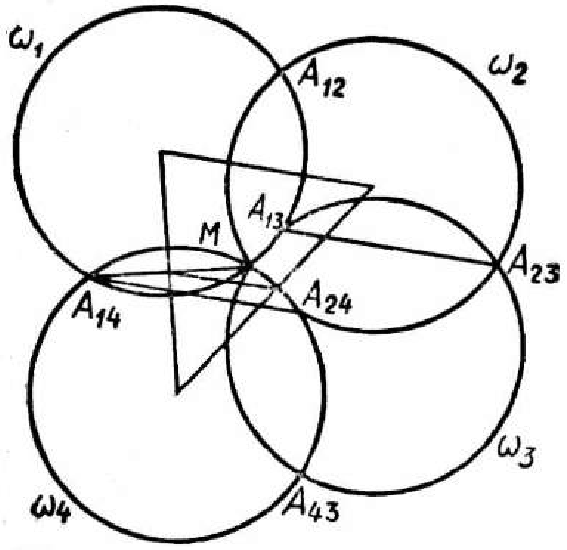
210 нчы рәсем



211 нче рәсем



212 нче рәсем



213 нче рәсем

5. $\overrightarrow{AC}$ күчерүен карагыз. K ноктасы өчен тиңдәшле L ноктасын төзеп, $[AK] \parallel [CL]$ ны табабыз. $\widehat{KCL} = 90°$, шулай булгач, $\widehat{AKC} = 90°$.

6. Трапециянең ян ягын аның нигезе белән билгеләнгән юнәлешкә һәм ераклыкка күчергәч, өчпочмак табарсыз. Шул өчпочмакның биеклеген исәпләгез.

7. $OABC$ параллелограммының капма-каршы түбәләреннән теләсә нинди турыга кадәр ераклыкларының суммасы яки аермасы тигез, чөнки алар диагональләр кисешкән ноктадан турыга кадәр ераклыкның икеләтелгәненә тигез, шуны искә алыгыз.

8. Бирелгән әйләнәгә конгруэнт булган ярдәмче әйләнә төзегез. Ул әйләнә бирелгән әйләнәгә орынсын һәм M ноктасы аша үтсен (211 нче рәсем). $|OO'| = 2R$, $|MO'| = R$ икәнен искә алыгыз. B — орыну ноктасы.

9. Үзәкле симметрияләрнең композициясен карагыз: $Z_R \circ Z_Q \circ Z_P \circ$ $\circ Z_N \circ Z_M = \delta$, $\delta(A) = A$, $\delta = Z_A$ (212 нче рәсем). $Z_P \circ Z_N \circ Z_M = Z_S$ булсын, ул вакытта $Z_R \circ Z_Q \circ Z_S =$ $= Z_A$. $MNPS$ һәм $SQRA$ параллелограммнарын төзегез.

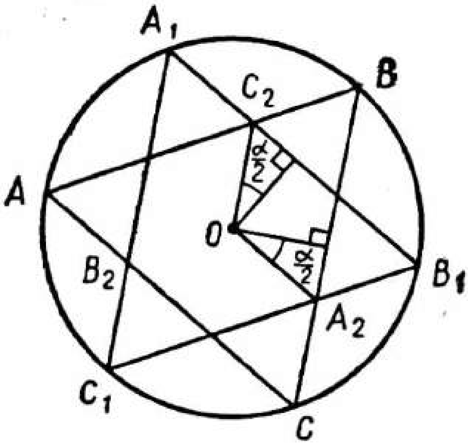
10. Ике әйләнәнең үзәкләрен тоташтыручы кисемтә өченче әйләнәнең беренче ике әйләнә белән кисешү нокталарын тоташтыручы кисемтәгә тигез икәненә һәм параллель булуына ышаныгыз. (213 нче рәсем).

11. O тирәсендә 90° лы почмакка борганда M ноктасына тиңдәшле M' ноктасын төзегез. Квадратның ягы $M'N$ турысында ята. O ноктасыннан $(M'N)$ на кадәр ераклык квадрат ягы озынлыгының яртысына тигез.

12. Үзәге O ноктасы булган 60° ка боруда әйләнәләрнең берсенең

образын төзегез. Бирелгән әйләнәләрнең икенчесе һәм төзелгән әйләнәнең кисешү ноктасы өчпочмакның икенче түбәсе була.

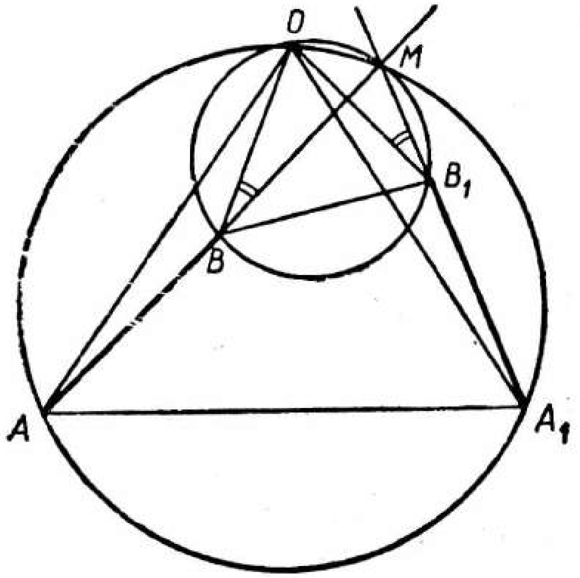
13. Әйләнәнең бирелгән озынлыктагы хордасын һәм, бирелгән әйләнәгә концентрик итеп, бирелгән нокта аша үтүче әйләнә төзегез. Әйләнәләрнең үзәге тирәсендәге боруны карагыз. Бу боруда бирелгән ноктага үзебез төзегән хорда белән әйләнәнең кисешү ноктасы тиңдәш була.



214 нче рәсем

14. Өчпочмакны үзәге тирәсендә 120° лы почмакка бору M ны N га, N ны P га, P ны M га чагылдыра; $|MN| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

15. Квадратны үзәге тирәсендә 90° лы почмакка бору P ны Q га, Q ны R га, R ны S ка, S ны P га чагылдыра; $|PQ| = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

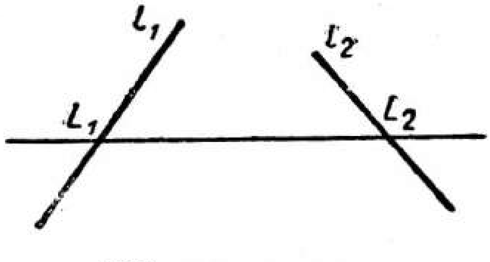


215 нче рәсем

16. O үзәкле 120° лы почмакка боруны карагыз (214 нче рәсем): $R_O^{120°}((AB)) = (BC)$, $R_O^{120°}((A_1B_1)) = (B_1C_1) \Rightarrow C_2 \to A_2$.

Аналогик рәвештә $R_O^{120°}(A_2) = B_2$, димәк, $A_2B_2C_2$ — тигезьяклы өчпочмак.

$$|A_2B_2| = \frac{m}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

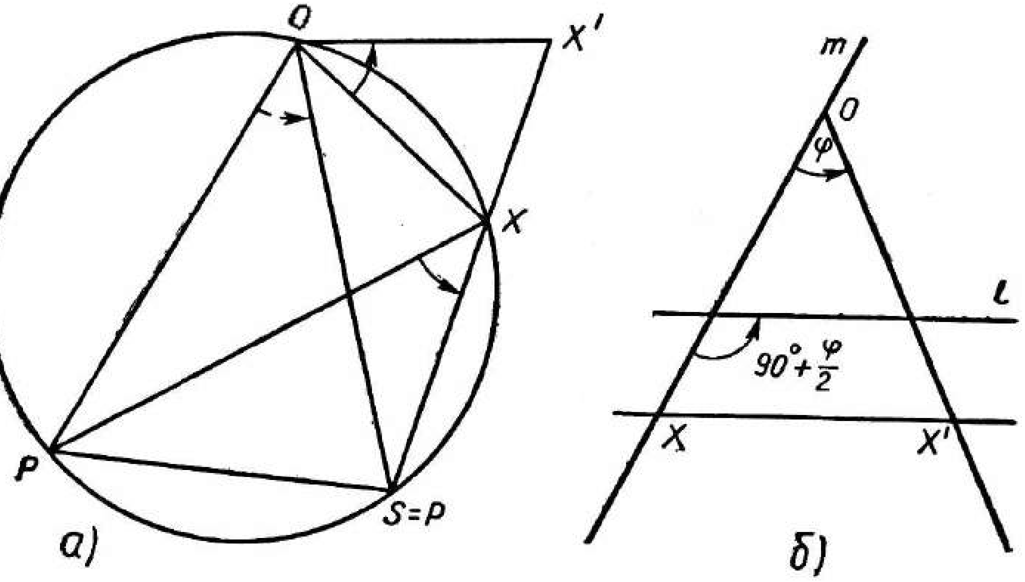


216 нчы рәсем

17. AB һәм A_1B_1 нурлары арасындагы почмакның бору почмагы φ гә тигез булуын истә тотыгыз. Шулай ук $\widehat{AOA_1} = \varphi$, монда O — бору үзәге. Моннан бору үзәге MAA_1 әйләнәсенеке икәнлеге чыга. Аналогик рәвештә $\widehat{BOB_1} = \varphi$ һәм O ноктасы MBB_1 әйләнәсенеке.

18. Теләсә нинди l турысы алабыз (216 нчы рәсем). Бирелгән боруда $l_2 \to l$ һәм $l \to l_1$ ($l \cap l_1 = L_1$, $l \cap l_2 = L_2$) булсын. $L_2 \in l_2$, шуңа күрә аңа тиңдәш L_2 ноктасы l ныкы була; аналогик рәвештә $L_2 \in l \Rightarrow L_2' \in l_1$, ягъни $L_2' = L_1$.

Әгәр бу борудагы тиңдәш нокталарның тагын бер пары l турысыныкы булса, l турысы үзенә чагылдырылыр иде.



217 нче рәсем

Үзәкле симметрия очрагында җавап башкача. Әгәр туры симметрия үзәге аша үтсә, бу турының һәр ноктасы шул ук турының ноктасында чагылдырыла. Үзәк аша үтмәүче туры өстендә бер пар да юк.

19. Һәр турыда тиңдәшле ноткалар пары бар (18 нче мәсьәлә): $X \to X'$.

а) $P \to P' = S \Rightarrow [PX] \to [P'X']$ һәм $\widehat{PXP'} = \varphi$ булсын, ягъни PP' кисемтәсе X ноктасыннан даими φ почмагы белән күренсен ди (217 нче рәсем, *а*). Димәк, M күплеге — бору үзәге O, S ноктасы аша һәм S ноктасына чагылдырыла торган P ноктасы аша үтүче әйләнә була.

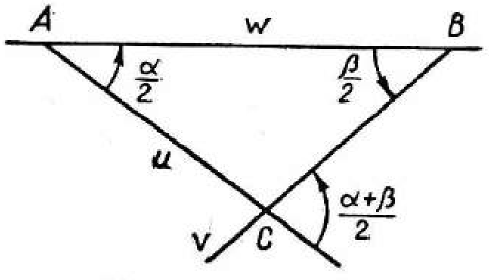
б) m турысы: $O \in m$, $\widehat{(m, l)} = 90° + \frac{\varphi}{2}$ (217 нче рәсем, *б*).

20. Боруларның һәркайсында ABC өчпочмагының O үзәге $A_1B_1C_1$ өчпочмагының O_1 үзәгенә чагылдырыла, димәк, һәр боруның үзәге OO_1 кисемтәсенә урта перпендикуляр өстендә ята. Әгәр $O = O_1$ булса, бору үзәкләре O белән тәңгәл киләләр.

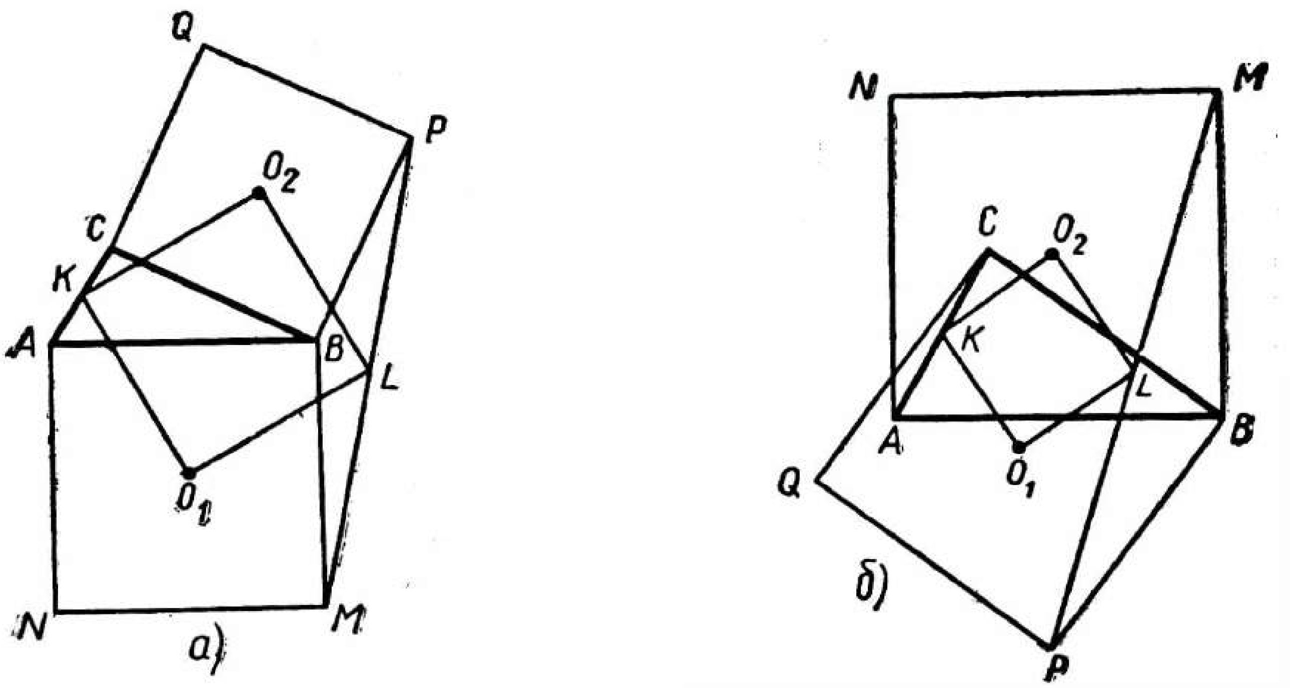
21. Күчәрләре бору үзәге аша үтеп, үзара бору почмагының яртысына тигез почмак төзегән күчәрле ике симметриянең композициясе буларак, боруны тикшерәбез (218 нче рәсем).

$R_A^\alpha = w \circ u$, $R_B^\beta = v \circ w$ ны язабыз, ул вакытта $R_B^\beta \circ R_A^\alpha = uwwu = vu$.

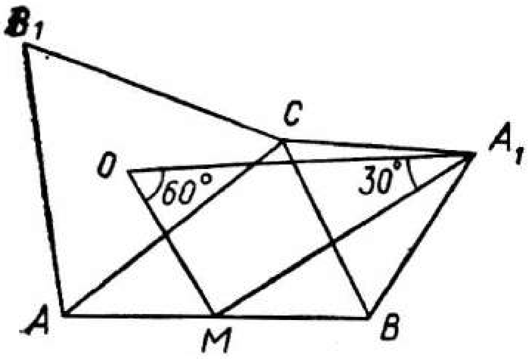
$\alpha + \beta < 360°$ булганда, ABC өчпочмагының почмаклары: $\widehat{CAB} = \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{CBA} = \frac{\beta}{2}$ һәм өчпочмак тискәре ориентирланган, әгәр $\alpha + \beta > 360°$ булса, $\widehat{CAB} = 180° - \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{CBA} = 180° - \frac{\beta}{2}$ һәм ABC өчпочмагы уңай ориентирланган булуына ышаныгыз.



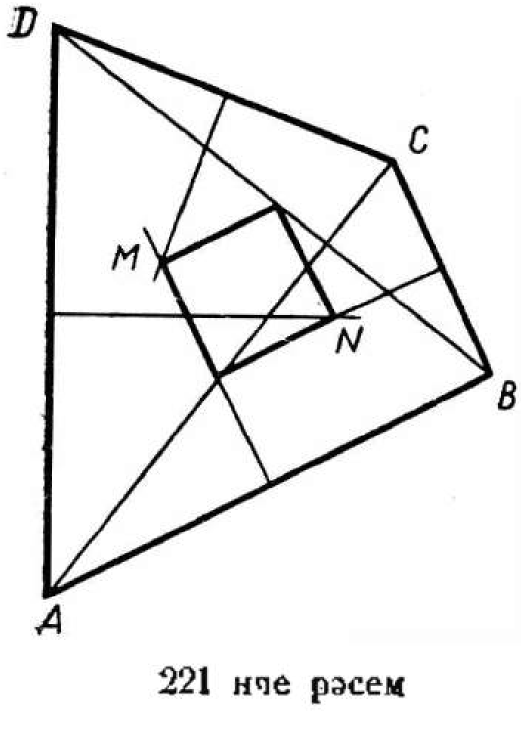
218 нче рәсем



219 нчы рәсем



220 нче рәсем



221 нче рәсем

22. Бирелгән квадратларның өчпочмакка карата тышкы өлкәдә урнашу очрагын карагыз. $R_{O_2}^{270°} \circ R_{O_1}^{270°}$ композициясенең A ны C га чагылдыруын, шуңа күрә $R_{O_2}^{270°} \circ R_{O_1}^{270°} = R_K^{180°}$ икәнен искәрегез. Моннан O_1O_2K — тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмак ($\hat{K} = 90°$).

Аналогик рәвештә $R_{O_2}^{90°} \circ R_{O_1}^{90°} = R_L^{180°}$, шуңа күрә O_1O_2L — шулай ук тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмак ($\hat{L} = 90°$). Димәк, O_1LO_2K — квадрат (219 нчы рәсем, *a*).

Квадратлар (AB) һәм (BC) ларына карата икенче якта төзелгән очрак өчен мәсьәлә аналогик рәвештә чишелә (219 нчы рәсем, *б*).

23. $R_O^{120°}(A) = C$, $R_{A_1}^{60°}(C) = B$ икәне ачык. Ләкин $R_M^{180°}(A) = B$. Димәк, $R_{A_1}^{60°} \circ R_O^{120°} = R_M^{180°}$, моннан $\widehat{MOA_1} = 60°$, $\widehat{MA_1O} = 30°$ (21 нче мәсьәләне һәм 220 нче рәсемне карагыз).

24. Бору үзәкләре һәм $ABCD$ дүртпочмагы диагональләренең урталары — квадратның түбәләре икәнен исбат итегез (221 нче рәсем).

§ 3. ВЕКТОРЛАР

1. Шарт буенча $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$, монда O — ирекле рәвештә алынган нокта. Бу тигезлекне болай язып була: $\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB_1})$, моннан $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{B_1A}$.

2. K, L, P, Q, R, S, T нокталары тиңдәшле рәвештә AM, MB, BC, CN, ND, DA, MN кисемтәләренең урталары булсын. Башта G_1 ноктасы $AMND$ дүртпочмагы урта сызыкларының уртак уртасы булуын исбат итик. Ирекле рәвештә O ноктасы сайлап алабыз.

$$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}),\ \overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ON}).$$

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}).$$

Әгәр G_1' һәм G_1'' нокталары KR һәм ST кисемтәләренең урталары булса, $\overrightarrow{OG_1'}=\overrightarrow{OG_1''}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ON})$; бу $G_1'=G_1''=G_1$ икәнен исбат итә.

Шулай булгач, $\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD})$.

Аналогик рәвештә $\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON})$.

$\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})$, ягъни $\overrightarrow{G_1G_2}$ векторы M һәм N нокталарын ничек сайлап алуга бәйле түгел. Күргәнебезчә, $\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$.

3. M ноктасын барлык векторларның башы итеп алабыз:

$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MM_3}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD},$$

$$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{MM_4}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}.$$

Моннан $\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_3}=\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{MM_4}$ була.

4. A_1, B_1, C_1, D_1 нокталары тиңдәшле рәвештә BCD, CDA, DAB, ABC өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары булсын:

$$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}),$$

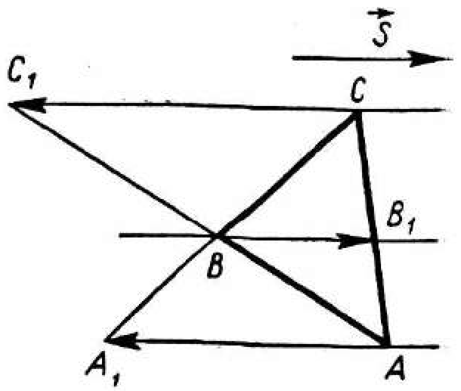
$$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\ \overrightarrow{OD_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \qquad (1)$$

Әгәр M һәм M_1 нокталары тиңдәшле рәвештә $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмаклары урта сызыкларының кисешү нокталары булса, ул вакытта

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1})$$

(2 нче мәсьәләнең чишелешен кара).

(1) тигезлеген исәпкә алып, $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ ны табабыз, ә ул $M_1 = M$ икәнен исбат итә.



222 нче рәсем

5. ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы G ны полюс[1] дип алабыз. Ул вакытта

$$\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA_1},\ \overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA_2},$$

$$\overrightarrow{GB_1} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB_1},\ \overrightarrow{GB_2} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB_2},$$

$$\overrightarrow{GC_1} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC_1},\ \overrightarrow{GC_2} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC_2},$$

Әгәр G_1 һәм G_2 нокталары тиңдәшле рәвештә $A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары булса,

$$\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1}),\ \overrightarrow{GG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GB_2} + \overrightarrow{GC_2}).$$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ һәм $\overrightarrow{BA_1} = -\overrightarrow{CA_2}$, $\overrightarrow{CB_1} = -\overrightarrow{AB_2}$, $\overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{BC_2}$ икәнен исәпкә алып, $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$ не табабыз, моннан G_1 һәм G_2 нокталарының G га карата симметрияле булулары килеп чыга.

6. C ноктасы полюс булсын (222 нче рәсем). $\vec{s}$ векторының $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ векторлары белән коллинеарлыгы нәтиҗәсендә табабыз: $\vec{s} = \alpha\overrightarrow{CC_1}$, $\vec{s} = \beta(\overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB})$, $\vec{s} = \gamma(\overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA})$. Моннан тыш, $\overrightarrow{CA_1} = l\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CB_1} = n\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CC_1} = m\overrightarrow{CA} + (1-m)\overrightarrow{CB}$. Барлык бу тигезлекләрне исәпкә алып, болай язып була:

$$\alpha(m\overrightarrow{CA} + (1-m)\overrightarrow{CB}) = \beta(n\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}),\ \beta(n\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = \gamma(l\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}),$$

моннан $\alpha m = \beta n$, $\alpha(1-m) = -\beta$, $\beta n = -\gamma$, $\gamma l = -\beta$. γ ны α һәм β аша күрсәтәбез: $m - 1 = \frac{\beta}{\alpha}$, $m = \frac{\beta}{\alpha} + 1$; $n = \frac{\alpha m}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\beta}$; $\gamma = -\beta n = -\beta - \alpha$. Димәк, $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

7. ABC өчпочмагының медианалары кисешү ноктасы G ны полюс дип алабыз. Ул вакытта $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{GB} + k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{GB_1} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{GC_1} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$, чөнки $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Димәк, G — $A_1B_1C_1$ өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы.

---

[1] Мәсьәләдә карала торган векторларны кайсы ноктадан сала башласалар, шул ноктаны кайвакытта полюс дип атыйлар.

8. O — полюс, K, E, F — AD, BC, MN кисемтәләренең урталары булсын.

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=$$

$$=k\overrightarrow{OB}+(1-k)\overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OC}+(1-k)\overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),\ \overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}),$$

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(k(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+(1-k)(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})),$$

$$\overrightarrow{KE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{KF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OK}=$$

$$=\frac{1}{2}k(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}).$$

$\overrightarrow{KE}\parallel\overrightarrow{EF}$, шуна күрә K, E, F нокталары бер турыныкы булалар.

9. $\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC}}{1+\beta}$, $\overrightarrow{OB_1}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\gamma\overrightarrow{OA}}{1+\gamma}$, $\overrightarrow{OC_1}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OB}}{1+\alpha}$.

C_1 не полюс дип алабыз ($C_1=O$), ул вакытта $\overrightarrow{C_1A}=-\alpha\overrightarrow{C_1B}$. $C_1\in(A_1B_1)$ булганлыктан, $\overrightarrow{C_1A_1}=\mu\overrightarrow{C_1B_1}$. Бу тигезлеккә $\overrightarrow{OA_1}$ һәм $\overrightarrow{OB_1}$ нең кыйммәтләрен куябыз:

$$\frac{\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC}}{1+\beta}=\mu\frac{\overrightarrow{OC}+\gamma\overrightarrow{OA}}{1+\gamma},\ \frac{\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC}}{1+\beta}=\mu\frac{\overrightarrow{OC}+\gamma(-\alpha\overrightarrow{OB})}{1+\gamma},\ \overrightarrow{OB}\nparallel\overrightarrow{OC}.$$

Таркатуның бердәнберлегеннән табабыз:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+\beta}=\dfrac{-\alpha\gamma\mu}{1+\gamma},\\ \dfrac{\beta}{1+\beta}=\dfrac{\mu}{1+\gamma},\end{cases}\text{моннан } \mu=\frac{\beta(1+\gamma)}{1+\beta},\ \alpha\beta\gamma=-1.$$

Киредән, $\vec{A}_1=\dfrac{\vec{B}+\beta\vec{C}}{1+\beta}$, $\vec{B}_1=\dfrac{\vec{C}+\gamma\vec{A}}{1+\gamma}$, $\vec{C}=\dfrac{\vec{A}+\alpha\vec{B}}{1+\alpha}$.

$$\alpha\beta\gamma=-1,\ \gamma=-\frac{1}{\alpha\beta},\ C_1 \text{ — полюс.}$$

$$\vec{B}_1=\frac{\vec{C}-\alpha\gamma\vec{B}}{1+\gamma}=\frac{\alpha}{\alpha\beta-1}(\vec{B}+\beta\vec{C})=\frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha\beta-1}\vec{A}_1.$$

Димәк, $\overrightarrow{C_1B_1}\parallel\overrightarrow{C_1A_1}$, ягъни $C_1\in(A_1B_1)$.

10. $\frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{ND}} = m$ дип тамгалыйк. Ул вакытта $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AM} + m\overrightarrow{AD}}{1+m}$, яки $\overrightarrow{AN} = \frac{k\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AD}}{1+m}$. Икенче яктан, $\overrightarrow{AN} = l(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. $\overrightarrow{AN}$ ны коллинеар булмаган $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ векторлары буенча таркатуның бердәнберлеге нигезендә, табабыз: $\frac{k}{1+m} = l$, $\frac{m}{1+m} = l$, моннан $l = \frac{k}{1+k}$.

11. $\frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{CN}} = m$ булсын. Ул вакытта $\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AM} + m\overrightarrow{AN}}{1+m}$.
Икенче яктан, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, ягъни $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} + l\overrightarrow{AN}$. Димәк, $\frac{1}{1+m} = k$, $\frac{m}{1+m} = l$, шуның нигезендә $k + l = 1$.

12. C_1 — полюс булсын. Ул вакытта $\overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{C_1C_0} = \alpha\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{A_0C_0} = k\overrightarrow{C_1C}$, чөнки $g \parallel (CC_1)$. Икенче яктан, $\overrightarrow{A_0C_0} = \overrightarrow{C_1C_0} - \overrightarrow{C_1A_0} = \alpha\overrightarrow{C_1B} - (m\overrightarrow{C_1B} + (1-m)\overrightarrow{C_1C})$ (A_0, B, C нокталарының бер турыныкы икәнен исәпкә алганда). $k\overrightarrow{C_1C} = (\alpha - m)\overrightarrow{C_1B} - (1-m)\overrightarrow{C_1C}$ булганлыктан, $k = m - 1$, $\alpha - m = 0$, ягъни $m = \alpha$, $k = \alpha - 1$. Шулай итеп, $\overrightarrow{A_0C_0} = (\alpha - 1)\overrightarrow{C_1C}$.

Аналогик рәвештә $\overrightarrow{B_0C_0}$ векторын $\overrightarrow{C_1C}$ аша аңлатыйк.

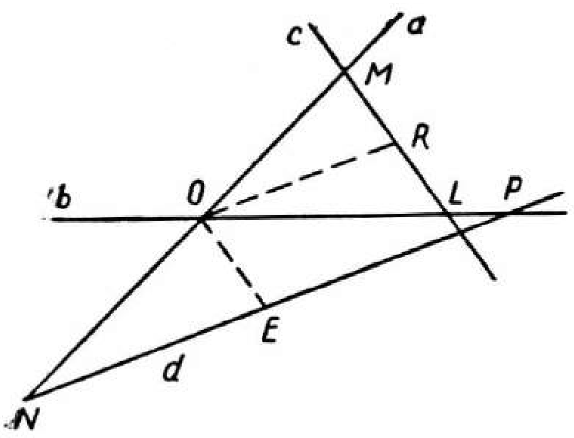
$$\overrightarrow{B_0C_0} = l\overrightarrow{C_1C};\ \overrightarrow{B_0C_0} = \overrightarrow{C_1C_0} - \overrightarrow{C_1B_0} = \alpha\overrightarrow{C_1B} - (n\overrightarrow{C_1A} + (1-n)\overrightarrow{C_1C}) =$$
$$= (\alpha + n)\overrightarrow{C_1B} - (1-n)\overrightarrow{C_1C},$$

моннан $n - 1 = l$, $\alpha + n = 0$, ягъни $n = -\alpha$, $l = -\alpha - 1$. $\overrightarrow{B_0C_0} = -(\alpha + 1)\overrightarrow{C_1C_0}$.

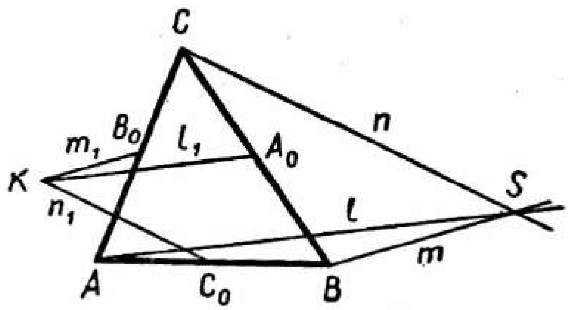
Шулай итеп, $\overrightarrow{A_0C_0} + \overrightarrow{B_0C_0} = (\alpha - 1)\overrightarrow{C_1C} - (\alpha + 1)\overrightarrow{C_1C} = -2\overrightarrow{C_1C}$, ягъни $\overrightarrow{A_0C_0} + \overrightarrow{B_0C_0}$ векторларының суммасы α га, ягъни (CC_1) на параллель булган g турысын ничек сайлап алуга бәйле түгел.

13. $R - [ML]$ нең уртасы булсын һәм $d \parallel (OR)$ дип бирелсен ди (223 нче рәсем). Бу очракта, мәсәлән, $c \parallel (OE)$ икәнен исбат итик, монда $E - [NP]$ нең уртасы. Табабыз: $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{ON} = n\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{OR}$, ягъни $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OL})$. Соңгы тигезлеккә $\overrightarrow{OP}$ һәм $\overrightarrow{ON}$ ның кыйммәтләрен куябыз:

$$m\overrightarrow{OL} - n\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{OL},\ \text{ягъни}\ (m-k)\overrightarrow{OL} = (k+n)\overrightarrow{OM}.$$



223 нче рәсем



224 нче рәсем

$\vec{OL}$ һәм $\vec{OM}$ векторлары коллинеар түгел, шуңа күрә $m-k=0$, $k+n=0$, ягъни $m=k$, $n=-k$. Ул вакытта $\vec{OP}=k\vec{OL}$, $\vec{ON}=-k\vec{OM}$. $\vec{OE}$ векторына коллинеар булган $(\vec{ON}+\vec{OP})$ векторын карыйбыз.

$$\vec{ON}+\vec{OP}=-k\vec{OM}+k\vec{OL}=k(\vec{OL}-\vec{OM})=k\vec{ML}.$$

Шулай булгач, $(OE)\parallel(ML)$. Күрсәтелгән үзлекне башка турылар өчен дә аналогик рәвештә исбат итәргә мөмкин.

14. $m_1\cap l_1=K$ булсын (224 нче рәсем). $(KC_0)\parallel n$ икәнен исбат итик.

$$\vec{KC_0}=\vec{SC_0}-\vec{SK};\quad \vec{SC_0}=\frac{1}{2}\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SB};$$

$$\vec{SK}=\vec{SA_0}+\vec{A_0B_0}+\vec{B_0K}=\frac{1}{2}\vec{SB}+\frac{1}{2}\vec{SC}+\frac{1}{2}\vec{SA}-\frac{1}{2}\vec{SB}+m\vec{SB}=$$
$$=m\vec{SB}+\frac{1}{2}\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SC}.$$

Икенче яктан,

$$\vec{SK}=\vec{SB_0}+\vec{B_0A_0}+\vec{A_0K}=\frac{1}{2}\vec{SB}+\frac{1}{2}\vec{SC}+\frac{1}{2}\vec{SB}-\frac{1}{2}\vec{SA}+n\vec{SA}=$$
$$=n\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SB}+\frac{1}{2}\vec{SC}.$$

Ул вакытта

$$m\vec{SB}+\frac{1}{2}\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SC}=n\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SB}+\frac{1}{2}\vec{SC} \text{ яки } m\vec{SB}+\frac{1}{2}\vec{SA}=$$
$$=n\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SB},$$ моннан $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$. Шуңа күрә

$$\vec{SK}=\frac{1}{2}(\vec{SA}+\vec{SB}+\vec{SC}).$$

Ул вакытта $\vec{KC_0}=\frac{1}{2}\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SB}-\frac{1}{2}(\vec{SA}+\vec{SB}+\vec{SC})=-\frac{1}{2}\vec{SC}$, шуның нәтиҗәсендә $(KC_0)\parallel(SC)$, ягьни n_1 турысы l_1 һәм m_1 турыларының кисешү ноктасы аша үтә.

15. 14 нче мәсьәләнең чишелешен карагыз.

16. $\vec{AP} = \alpha\vec{PC}$, $\vec{BQ} = \beta\vec{QC}$, $\vec{C_1M} = \gamma\vec{MC}$ булсын. $\alpha + \beta = 2\gamma$ икәнен исбат итәргә кирәк. C ноктасын полюс дип алабыз. Ул вакытта $\vec{CP} - \vec{CA} = -\alpha\vec{CP}$, $\vec{CQ} - \vec{CB} = -\beta\vec{CQ}$, $\vec{CM} - \vec{CC_1} = -\gamma\vec{CM}$, өстәвенә $\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$. Моның нәтиҗәсендә $\vec{CP} = \frac{1}{1+\alpha}\vec{CA}$, $\vec{CQ} = \frac{1}{1+\beta}\vec{CB}$, $\vec{CM} = \frac{1}{2(1+\gamma)}(\vec{CA} + \vec{CB})$. M, P һәм Q нокталарының бер турыдагы булуларын искә алып, язабыз: $\vec{CM} = m\vec{CP} + (1-m)\vec{CQ}$ яки $\frac{1}{2(1+\gamma)}(\vec{CA}+\vec{CB}) = \frac{m}{1+\alpha}\vec{CA} + \frac{1-m}{1+\beta}\vec{CB}$, моннан $\frac{1}{2(1+\gamma)} = \frac{m}{1+\alpha}$, $\frac{1}{2(1+\gamma)} = \frac{1-m}{1+\beta}$. Табылган тигезләмәләрдән m ны чыгарып ташлап, $\alpha + \beta = 2\gamma$ булуын ачыклыйбыз.

17. AC һәм BD диагональләренең урталарын тиңдәшле рәвештә E һәм F аша тамгалыйк. Ул вакытта $\vec{OM} = \vec{OE} + \vec{OF} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) + \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

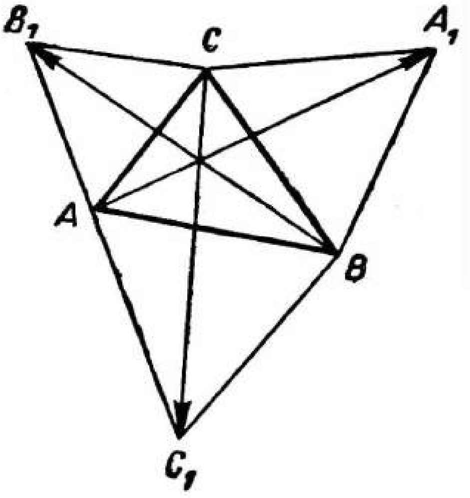
18. $\frac{360°}{n}$ $(n \geqslant 3)$ га борганда, $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{OA_i}$ векторы үзенә күчә, чөнки бу боруда $\vec{OA_1}$ векторы $\vec{OA_2}$ векторына, $\vec{OA_2}$ $\vec{OA_3}$ кә ..., $\vec{OA_n}$ $\vec{OA_1}$ векторына күчә. Мондый үзлеккә нуль-вектор гына ия була ала.

19. $\vec{MA_i} = \vec{MO} + \vec{OA_i}$, ә $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{OA_i} = \vec{0}$ икәнен исәпкә алырга.

20. $\vec{A_iB_i} = \vec{A_iO_1} + \vec{O_1O_2} + \vec{O_2B_i}$ һәм $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{A_iO_1} = \vec{0}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{O_2B_i} = \vec{0}$ икәнен исәпкә алырга.

21. $\vec{OA_3} = -\vec{OA_1} + 2\sin 72°\,\vec{OA_2}$.

22. Башта теләсә нинди дүртпочмакта $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{BA})$ икәнен исбатлыйбыз, монда M һәм N — тиңдәшле рәвештә $[CB]$ һәм $[DA]$ ләренең урталары. $\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CD} + \vec{DN}$, $\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{AN}$. Бу тигезлекләрне кушып һәм $\vec{MC} + \vec{MB} = \vec{0}$, $\vec{DN} + \vec{AN} = \vec{0}$ икәнен исәпкә алып, $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{BA})$ ны табабыз. Әгәр $\vec{CD}$ һәм $\vec{BA}$ векторлары коллинеар булмасалар, $|MN| < \frac{1}{2}(|CD| + |BA|)$, моны өчпочмакның яклары үзлеген кулланып исбатлавы кыен түгел. Димәк, $\vec{CD} \parallel \vec{BA}$, ягъни бирелгән $ABCD$ дүртпочмагы — трапеция яки параллелограмм.



225 нче рәсем

23. O ноктасын полюс дип алабыз. Ул вакытта $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC}$. $\vec{OB_1} = \vec{OA_1} + \vec{OC_1}$, $\vec{AA_1} = \vec{OA_1} - \vec{OA}$, $\vec{BB_1} = \vec{OB_1} - \vec{OB} = \vec{OA_1} + \vec{OC_1} - \vec{OA} - \vec{OC}$; $\vec{CC_1} = \vec{OC_1} - \vec{OC}$. $\vec{AA_1} - \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$ икәнен күрергә була. Бу AA_1, BB_1 һәм CC_1 кисемтәләреннән өчпочмак төзеп булуын исбатлый. Шуңа күрә ул кисемтәләрнең һәркайсы калган икесенең суммасыннан зур түгел.

24. $\vec{AA_1} = \vec{CA_1} - \vec{CA}$, $\vec{BB_1} = \vec{AB_1} - \vec{AB}$, $\vec{CC_1} = \vec{BC_1} - \vec{BC}$ (225 нче рәсем). $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = (\vec{CA_1} + \vec{AB_1} + \vec{BC_1}) - (\vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BC})$. $\vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{0}$. $\vec{CA_1}$, $\vec{AB_1}$ һәм $\vec{BC_1}$ векторлары тиңдәшле рәвештә $\vec{CB}$, $\vec{AC}$ һәм $\vec{BA}$ векторларын 60° ка борганда килеп чыгарга мөмкин. Бу боруда $\vec{CB} + \vec{AC} + \vec{BA}$ векторларының суммасы $\vec{CA_1} + \vec{AB_1} + \vec{BC_1}$ векторларының суммасына күчә.

Ләкин $\vec{CB} + \vec{AC} + \vec{BA} = \vec{0}$, шуңа күрә дә $\vec{CA_1} + \vec{AB_1} + \vec{BC_1} = \vec{0}$.

25. $\vec{AA_1} = \vec{BA_1} - \vec{BA}$, $\vec{BB_1} = \vec{CB_1} - \vec{CB}$, $\vec{CC_1} = \vec{AC_1} - \vec{AC}$. $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = (\vec{BA_1} + \vec{CB_1} + \vec{AC_1}) - (\vec{BA} + \vec{CB} + \vec{AC})$.

$$\vec{BA} + \vec{CB} + \vec{AC} = \vec{0}.$$

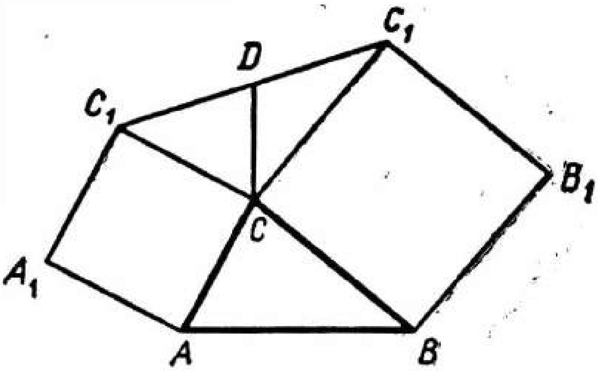
$\vec{BA_1}$, $\vec{CB_1}$, $\vec{AC_1}$ векторлары тиңдәшле рәвештә $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ һәм $\vec{AB}$ векторларын 45° ка бору һәм $\frac{\sqrt{2}}{2}$ гә тапкырлау юлы белән табылырга мөмкин. Шуңа күрә $\vec{BA_1} + \vec{CB_1} + \vec{AC_1}$ векторларының суммасы да $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB})$ векторын 45°-ка бору белән табылырга мөмкин. $\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{0}$, шуңа күрә дә $\vec{BA_1} + \vec{CB_1} + \vec{AC_1} = \vec{0}$.

Шулай итеп, $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.

26. $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$ (24 нче мәсьәләне кара). Шуңа күрә $\vec{OA_1} - \vec{OA} + \vec{OB_1} - \vec{OB} + \vec{OC_1} - \vec{OC} = \vec{0}$.

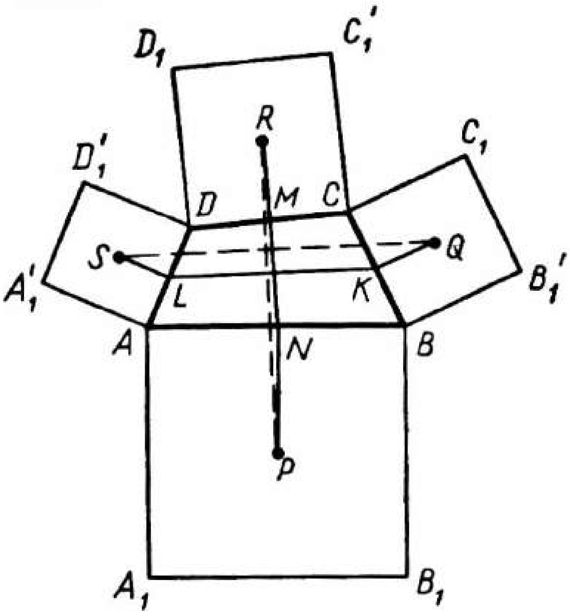
Әгәр O — ABC өчпочмагының медианалары кисешү ноктасы булса, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, шулай булгач, $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{0}$. Моннан O ноктасы $A_1B_1C_1$ өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы икәнлеге килеп чыга.

27. $\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_2} = -\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{A_2A}$. 90° ка борганда, $\overrightarrow{A_2A} \to \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC} \to \overrightarrow{BB_2}$, ягъни $\overrightarrow{CA_2} \to \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_2} = \overrightarrow{CB_2}$, моннан $\overrightarrow{CA_2} \perp \overrightarrow{CB_2}$ һәм $|\overrightarrow{CA_2}| = |\overrightarrow{CB_2}|$ икәнлеге килеп чыга.



226 нчы рәсем

28. D — $[C_1C_1']$ нең уртасы булсын. (226 нчы рәсем). $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CC_1'})$. 90° ка борганда, $\overrightarrow{CC_1}$ һәм $\overrightarrow{CC_1'}$ векторлары тиңдәшле рәвештә $\overrightarrow{CA}$ һәм $-\overrightarrow{CB}$ векторларына күчәрләр. Димәк, бу боруда $(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CC_1'})$ векторларының суммасы $(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$ векторына, ягъни $\overrightarrow{BA}$ векторына күчәр. Шуңа күрә $(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CC_1'}) \perp \perp \overrightarrow{BA}$, $|\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CC_1'}| = |\overrightarrow{BA}|$, моннан мәсьәләнең раславы килеп чыга да инде.



227 нче рәсем

29. $\overrightarrow{PR}$ векторы $\overrightarrow{SQ}$ векторын 90° ка бору юлы белән килеп чыкканын исбат итик (227 нче рәсем).

$$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KQ} \text{ яки}$$

$$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SL} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{KQ}.$$

Соңгы тигезлекнең уң кисәгендәге һәр векторны 90° ка борабыз. Ул вакытта $\overrightarrow{SL} \to \overrightarrow{LD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \to \overrightarrow{MR}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{KQ} \to \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Ул вакытта $\overrightarrow{SQ} \to \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{PN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{PN} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{PR}$. Димәк, $\overrightarrow{PR}$ векторы $\overrightarrow{SQ}$ нан 90° ка борып табыла. Шулай булгач, $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{SQ}$, $|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{SQ}|$.

30. ABC өчпочмагында C почмагы биссектрисасының C_1 нигезе AB ягын $\lambda_1 = \frac{b}{a}$, $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_1\overrightarrow{C_1B_1}$ чагыштырмасында бүлә, ә камаулы әйләнәнең O үзәге CC_1 биссектрисасын $\lambda_2 = \frac{a+b}{c}$, $\overrightarrow{CO} = \lambda_2\overrightarrow{OC_1}$ чагыштырмасында бүлә. Шуңа күрә $\overrightarrow{OC_1} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b}$;

икенче яктан, $\overrightarrow{OC_1} = -\frac{c}{a+b}\overrightarrow{OC}$. Табылган тигезлекләрнең уң кисәкләрен тигезләсәк, шуның белән мәсьәлә исбатлана.

§ 4. ГОМОТЕТИЯ

1. Гомотетияләрнең үзәкләре бирелгән полосаларның кырыйларына параллель булган ике туры өстендә яталар. Гомотетия коэффициенты $\pm\frac{d_1}{d}$ гә тигез, монда d — (a, b) полосасының киңлеге, d_1 — (a_1, b_1) полосасының киңлеге.

2. Үзәкләре O_1 һәм O_2 булган $H_1^{k_1}$ һәм $H_2^{k_2}$ гомотетияләрен карагыз. $H_1^{k_1}(A_1) = A_2$, $H_2^{k_2}(A_2) = A_3$, $H_1^{k_1}(B_1) = B_2$, $H_2^{k_2}(B_2) = B_3$ булсын, монда A_1 һәм B_1 — ирекле рәвештә алынган төрле нокталар. $H_2^{k_2}$ һәм $H_1^{k_1}$ композициясенең A_1 не A_3 кә, B_1 не B_3 кә чагылдыруына, өстәвенә $[A_1B_1] \parallel [A_3B_3]$, $|A_3B_3| = k_1k_2|A_1B_1|$ икәненә ышаныгыз. Әгәр $k_1k_2 \neq 1$ булса, композиция k_1k_2 коэффициентлы гомотетия була; әгәр $k_1k_2 = 1$, ләкин $O_1 \neq O_2$ булса, композиция $\overrightarrow{A_1A_3}$ күчерүе була; әгәр $k_1k_2 = 1$, $O_1 = O_2$ булса, бердәй үзгәртү табабыз.

3. $H_1^{k_1}$ һәм $H_2^{k_2}$ — үзәкләре O_1 һәм O_2 булган бирелгән гомотетияләр булсын. Әгәр $k_1 \neq k_2$ булса, ике гомотетиянең дә тиңдәшле нокталарының уртак пары була. Чыннан да, әгәр $(H_2^{k_2})^{-1} \circ H_1^{k_1}$ композициясе — гомотетия, ә A_1 ноктасы аның үзәге булса,
$$(H_2^{k_2})^{-1} \circ H_1^{k_1}(A_1) = A_1.$$
Моннан табабыз:
$$H_1^{k_1}(A_1) = A_2, (H_2^{k_2})^{-1}(A_2) = A_1, H_2^{k_2}(A_1) = A_2.$$
(A_1, A_2) — тиңдәш нокталарның уртак пары булып тора. Әгәр $k_1 = k_2$ булса, бирелгән гомотетияләрнең уртак парлары булмый.

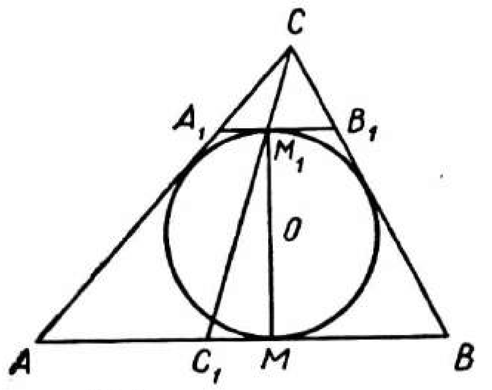
4. Гомотетия вакытында бирелгән әйләнәнең үзәге әлеге әйләнәгә гомотетик әйләнәнең үзәге булырга тиешле ноктага чагылдырылуына игътибар итегез.

5. Ике әйләнәнең уртак ноктасында аларның берсенә орынма төзегез. Гомотетия вакытында ул үзенә чагылдырыла һәм, моннан тыш, икенче әйләнәгә дә орынма булып кала.

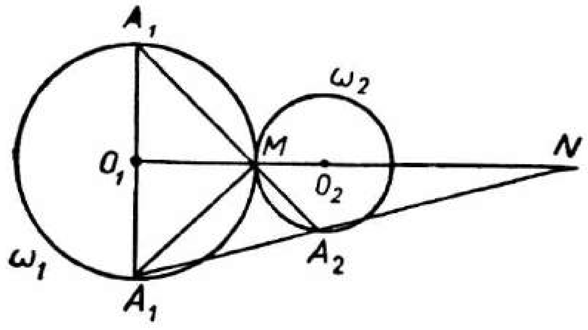
6. Үзәге A һәм коэффициенты $-k$ булган гомотетиядә ω_2 әйләнәсен ω_2' гә чагылдырыгыз. ω_2' әйләнәсе ω_1 әйләнәсен эзләнелә торган M ноктасында кисеп үтә.

7. M ноктасын — гомотетия үзәге, ә бирелгән чагыштырманы (капма-каршы тамгасы белән) гомотетия коэффициенты итеп алып, бирелгән әйләнәгә гомотетик булган әйләнә төзегез. Бу әйләнә бирелгән әйләнәне ике ноктада кисеп үтә. Ул ике нокта — эзләнелә торган ике хорданың очлары булып тора. Әгәр әйләнәләр кисешмәсәләр, мәсьәләнең чишелеше булмый, әйләнәләр орынсалар — бер чишелеше була.

8. Әгәр әйләнәләр концентрик булмасалар, гомотетияләрнең үзәкләре әйләнәләрнең үзәкләрен тоташтыручы кисемтәне эчтән



228 нче рәсем



229 нчы рәсем

һәм тыштан $R_2 : R_1$ чагыштырмасында бүләләр. Әгәр әйләнәләр концентрик булсалар, гомотетиянең ике үзәге дә әйләнәләрнең уртак үзәге белән тәңгәл киләләр.

9. $(AC) \parallel (A_1C_1)$ һәм $(BC) \parallel (B_1C_1)$ булырлык итеп, ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары төзегез. CC_1 турысы AB турысын эзләнелгән ноктада кисеп үтә.

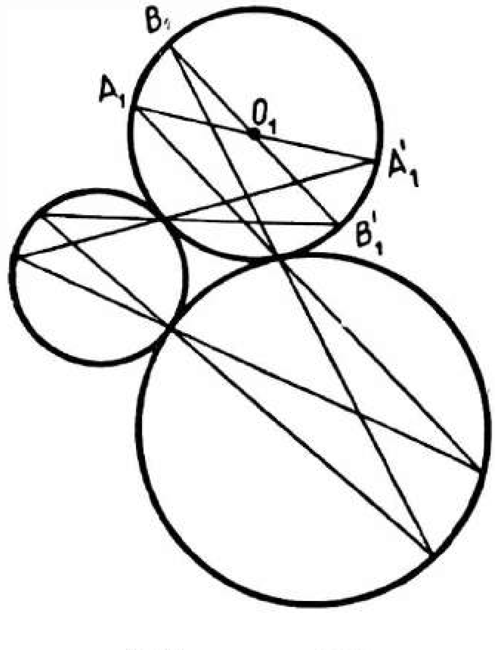
10. Почмакның якларына орынучы нинди дә булса әйләнә төзегез. Почмакның түбәсе һәм бирелгән нокта аша үтүче нур әйләнәне ике ноктада кисеп үтә. Ул нокталарның һәркайсын бирелгән ноктага чагылдыручы һәм үзәге почмакның түбәсендә булган ике гомотетияне карагыз.

11. Почмакның берәр ягына гомотетик нур төзегез. Ул нурның гомотетия үзәге M ноктасында һәм коэффициенты бирелгән чагыштырмага тигез булсын. Төзелгән нур белән почмакның икенче ягының кисешү ноктасын туры ярдәмендә M ноктасы белән тоташтырыгыз.

12*. $[AC]$ сен B_1 ноктасында һәм $[BC]$ сен A_1 ноктасында кисәрлек итеп, әйләнәгә M_1 ноктасында орынма төзегез (228 нче рәсем). $|CA_1| + |A_1M_1| = |CB_1| + |B_1M_1|$ икәненә ышаныгыз һәм ABC, $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының гомотетик булуыннан файдаланыгыз.

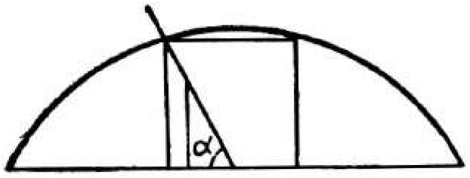
13. Әгәр O_1 — ω_1 әйләнәсенең үзәге булса, S_{O_1} симметриясе A_1 ноктасын A_1' ноктасына чагылдыра, ә M үзәкле һәм коэффициенты $-\frac{R_2}{R_1}$ булган гомотетия A_1' ноктасын A_2 ноктасына чагылдыра (229 нчы рәсем). Ләкин үзәкле симметрия белән гомотетиянең композициясе гомотетия була. Шулай булгач, $A_1 \to A_2$ чагылдыруы гомотетия була. Бу гомотетиянең үзәге бирелгән әйләнәләр гомотетиясенең икенче үзәге белән тәңгәл килә.

14. Үзәкләре орыну нокталарында һәм коэффициентлары $-\frac{R_2}{R_1}$, $-\frac{R_3}{R_2}$,



230 нчы рәсем

$-\frac{R_1}{R_3}$ булган өч гомотетиянең композициясен карагыз (230 нчы рәсем). Бу композиция күрсәтелгән коэффициентларның тапкырчыгышына, ягъни $k = -1$ гә тигез коэффициентлы гомотетия була. Килеп чыккан үзәкле симметрия беренче әйләнәне үзенә һәм аның һәр ноктасын диаметраль капма-каршы ноктага чагылдыра. A_1 ноктасы өчен — A_1', ә B_1 ноктасы өчен B_1' ноктасын төзибез. A_1A_1' һәм B_1B_1' диаметрлары беренче әйләнәнең үзәгендә кисешәләр.

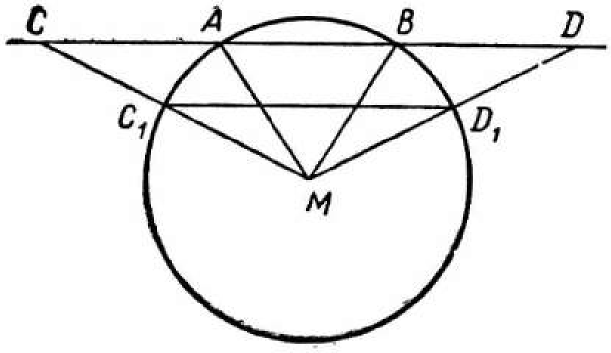


231 нче рәсем

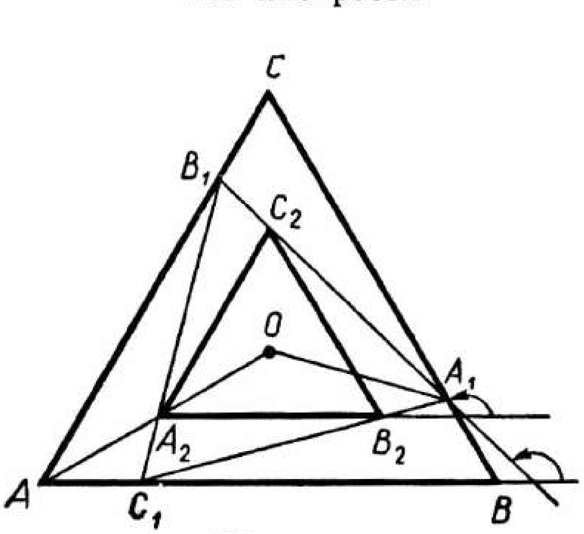
15. Сегмент нигезенең уртасы аша нигезе белән $\operatorname{tg}\alpha = 2$ булырлык α почмагы төзүче нур үткәрегез (231 нче рәсем). Бу нур сегмент дугасын эзләнелә торган квадрат түбәләренең берсендә кисеп үтә.

19. Радиусларның очлары A һәм B аша туры үткәрегез, ул туры өстендә $[AB]$ нә конгруэнт булган AC һәм BD кисемтәләре төзегез. Үзәге әйләнә үзәгендә булган гомотетия CD кисемтәсен эзләнелә торган C_1D_1 хордасына чагылдыра (232 нче рәсем).

20.* Бору белән гомотетиянең композициясе ABC өчпочмагын — $A_1B_1C_1$ өчпочмагына, ә икенче бер гомотетия белән боруның композициясе $A_1B_1C_1$ өчпочмагын $A_2B_2C_2$ өчпочмагына чагылдыра (233 нче рәсем). Бу вакытта гомотетияләрнең үзәкләре һәм бору үзәкләре бирелгән өчпочмакның үзәге O белән тәңгәл киләләр. Гомотетияләрнең коэффициентлары тигез, ә бору почмаклары тамгалары белән аерылалар. Гомотетияләрнең коэффициентлары тапкырчыгышы $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$ гә, ә бору почмакларының суммасы 0° ка тигез. Шулай итеп, $A_2B_2C_2$ өчпочмагы $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$ коэффициенты белән ABC өчпочмагына гомотетик.



232 нче рәсем



233 нче рәсем

§ 5. ОХШАШЛЫК[1]

1. $A \to A_1$, $B \to B_1$ охшашлык булуга ышаныгыз. Бу охшашлык гомотетия һәм күчүнең композициясе була. Ике охшашлык-

[1] 219 нчы биттәге III кушымтаны карагыз.

ның һәркайсы бирелгән AB чикле ярымъяссылыкны тиңдәшле рәвештә A_1B_1 чикле төрле ярымъяссылыкларга чагылдыра.

2. Беренче төр охшашлыкның[1] үзәге (ABM) һәм (A_1B_1M) әйләнәләренең кисешү ноктасы була, монда $(AA_1)\cap(BB_1)=M$.

Икенче төр охшашлык үзәге — AA_1 һәм BB_1 кисемтәләрен эчтән һәм тыштан охшашлык коэффициентына тигез чагыштырмада бүлү нокталары аша үтүче турыларның кисешү ноктасы ул.

3. Ике өчпочмакның гомотетик булуын һәм өстәвенә гомотетия үзәге өчпочмакларга камаулы әйләнәләрнең уртак үзәге белән тәңгәл килгәнен искә алыгыз. Гомотетия коэффициенты $k=\frac{r-d}{r}$, монда r — ABC өчпочмагына камаулы әйләнәнең радиусы.

4. Шуңа игътибар итегез: әгәр дүртпочмакның тиңдәшле яклары параллель, ләкин шуның белән бергә тиңдәш булмаган диагональләре параллель булсалар, дүртпочмаклар гомотетик булмыйлар. Гадәти очракта гомотетик булган ике өчпочмакны карау җитә.

5. $a^2+b^2=5c^2$.

6. Q ноктасы — икенче төр охшашлык үзәге, бирелгән турыларның симметрия күчәрләре — охшашлыкның икеле турылары, охшашлык коэффициенты $|\cos\varphi|$ гә тигез.

7. Өчпочмакның ике биеклегенең нигезләре аша үтүче туры шул өчпочмактан бирелгәнгә охшаш һәм аңа капма-каршы ориентирланган өчпочмак кисеп ала дигән үзлектән файдаланыгыз.

Охшашлык коэффициенты $|\cos\varphi|$ гә тигез, монда φ — диагональләр арасындагы почмак, килеп чыккан охшашлык икенче төр охшашлык була.

8. Үзәге бирелгән әйләнәнең үзәгендә, охшашлык коэффициенты $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ һәм бору почмагы $\frac{\alpha}{2}$ булган беренче төр охшашлык $A'B'C'$ өчпочмагын (A', B', C' — BC, CA һәм AB якларының урталары) $A_0B_0C_0$ өчпочмагына чагылдыра. Шуңа күрә $A_0B_0C_0$ өчпочмагы охшашлык коэффициенты $\frac{1}{2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}$ белән ABC өчпочмагына охшаш.

9. Алдагы мәсьәләнең чишелешен карагыз.

11. Трапециянең якларына үткәрелгән урта перпендикулярлар белән билгеләнгән дүртпочмак шундый үзлеккә ия: аның диагональләре бирелгән трапециянең тиңдәш диагональләренә перпендикуляр була. Моның шулай икәненә ышаныгыз. Шуңа күрә килеп чыккан дүртпочмакны теләсә нинди үзәк тирәсендә 90° ка

[1] Ориентациясен үзгәртмәүче охшашлык беренче төр охшашлык дип атала; әгәр ориентациясен үзгәртсә, икенче төр охшашлык була.

бору аны бирелгән дүртпочмакка гомотетик булган дүртпочмакка чагылдыра. Охшашлык коэффициенты трапеция урта сызыгының нигезгә авышлык почмагы котангенсына тигез.

12. A_1 ноктасын ирекле рәвештә сайлап алыгыз. Шул ноктаны үзәк итеп алып, охшашлык коэффициенты һәм бору почмагы ABC өчпочмагыннан чыгып билгеләнгән охшашлык белән AC турысын (AB) ны эзләнелгән C_1 ноктасында кисүче турыга чагылдырыгыз.

13. Әгәр $|AB| = c$ булса, $|A_1B_1| = c_1 = kc$. $|A_0B_0| = c_0 = c\sqrt{1 + k^2 - 2k\cos\varphi}$ икәнен исбат итегез, монда $\varphi - \vec{AB}$ һәм $\vec{A_1B_1}$ векторлары арасындагы почмак, $k_0 = \sqrt{1 + k^2 - 2k\cos\varphi}$ — ABC өчпочмагын $A_0B_0C_0$ өчпочмагына чагылдыручы охшашлык коэффициенты.

14. Әйләнәләрнең берсен үзәге бирелгән ноктада булган беренче төр охшашлык белән әйләнәгә чагылдырыгыз. Охшашлык коэффициенты бирелгән өчпочмакның ике ягының чагыштырмасына, ә бору почмагы бу яклар арасындагы почмакка тигез. Төзелгән әйләнәнең бирелгән икенче әйләнә белән кисешү нокталары — эзләнелгән түбәләр.

15. Ирекле $A_1B_1C_1D_1$ квадраты өчен аның диагонален эченә алмаган симметрия күчәре l ны төзегез. Бу күчәр өстендә шундый нокталар табыгыз: ул нокталардан квадратның күчәрдән бер якта урнашкан икс түбәсенә кадәр ераклыклар чагыштырмасы бирелгән әйләнәләрнең радиуслары чагыштырмасына тигез булсын. Аннан соң охшаш үзгәртүдән файдаланыгыз.

§ 6. КООРДИНАТАЛАР[1]

1. Яссылыкның күрсәтелгән параллель күчерүендә ирекле $M(x, y)$ ноктасы $M_1(x_1, y_1)$ ноктасына чагылдырылсын ди. Ул вакытта $\vec{MM_1} = \vec{AA_1}$, моннан $x_1 - x = a_1 - a$, $y_1 - y = b_1 - b$, яки $x_1 = x + a_1 - a$, $y_1 = y + b_1 - b$.

2. $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ — $Ox'y'$ координаталар системасының базис векторлары булсын. Oxy системасында аларның координаталары;
$\vec{i'}(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\vec{j'}(\cos(\varphi + 90°), \sin(\varphi + 90°))$ яки $\vec{j'}(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, икенче яктан, $\vec{OM} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} = x'(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) + y'(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) = (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\vec{i} + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\vec{j}$. $\vec{OM}$ векторын $\vec{i}, \vec{j}$ базисы буенча таркатуның бердәнберлеге нигезендә, табабыз: $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$, $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$, моннан эзләнелгән формулаларны табабыз:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

3. Күрсәтелгән боруда $M(x, y)$ ноктасы $M'(x', y')$ ноктасына чагылдырылсын ди. Күргәнебезчә, бу боруда $E_1(1, 0)$ ноктасы —

---

[1] II, III кушымтаны карагыз, 218, 219 нчы битләр.

$E_1'(\cos\varphi, \sin\varphi)$ гә, ә $E_2(0, 1)$ исә $E_2'(\cos(90^\circ+\varphi), \sin(90^\circ+\varphi))$, ягъни $E_2'(-\sin\varphi, \cos\varphi)$ ноктасына чагылдырыла. OM һәм OM_1', ME_1 һәм $M'E_1'$, ME_2 һәм $M'E_2'$ кисемтәләренең конгруэнтлык шартларын координаталар аша язабыз: $x^2+y^2=x'^2+y'^2$, $(x-1)^2+y^2=(x'-\cos\varphi)^2+(y'-\sin\varphi)^2$, $x^2+(y-1)^2=(x'+\sin\varphi)^2+(y'-\cos\varphi)^2$. Бу тигезлекләрдән табабыз:

$$x=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi,\ y=-x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

моннан

$$x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\ y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

4. $y=kx+b$ турысына карата күчәрле симметриядә $M(x, y)$ ноктасы $M_1(x_1, y_1)$ ноктасына чагылдырыла. MM_1 кисемтәсенең уртасы бирелгән турыныкы, ягъни

$$\frac{y+y'}{2}=k\frac{x+x'}{2}+b.$$

MM' турысы симметрия күчәренә перпендикуляр, шуңа күрә

$$\frac{y'-y}{x'-x}\cdot k=-1.$$

Бу тигезләмәләрдән табабыз:

$$x'=x-\frac{2k}{1+k^2}(kx+b-y),\ y'=y+\frac{2}{1+k^2}(kx+b-y).$$

5. 3 нче мәсьәләгә нигезләнеп, координаталар башлангычы тирәсендә φ почмагына борганда табабыз: $x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi$, $y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi$. $A(0;\ 0)\to A_1(0;\ 0)$, $B(5;\ 4)\to B_1(3;\ 4)$, шуңа күрә $3=5\cos\varphi$, $4=5\sin\varphi$.

Җавап. $x'=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y,\ y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y.$

6. $\overrightarrow{SM'}=k\overrightarrow{SM}$, шуңа күрә $x'-x_0=k(x-x_0)$, $y'-y_0=k(y-y_0)$, моннан $x'=kx+(1-k)x_0$, $y'=ky+(1-k)y_0$.

7. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$, шуңа күрә $x=a+x'$, $y=b+y'$, моннан $x'=x-a$, $y'=y-b$.

8. Үзәге $S_1(x_1, y_1)$ һәм коэффициенты k_1 булган гомотетия $M(x, y)$ ноктасын $M'(x', y')$ ноктасына чагылдырсын, ә үзәге $S_2(x_2, y_2)$ һәм коэффициенты k_2 булган гомотетия M' ноктасын $M''(x'', y'')$ ноктасына чагылдырсын. 6 нчы мәсьәлә буенча табабыз:

$$x'=k_1x+(1-k_1)x_1;\ x''=k_2x+(1-k_2)x_2.$$

$$x''=k_2k_1x+k_2(1-k_1)x_1+(1-k_2)x_2; \qquad (*)$$

$$y''=k_2k_1y+k_2(1-k_1)y_1+(1-k_2)y_2.$$

Әгәр

$x''=k_0x+(1-k_0)x_0$, $y''=k_0y+(1-k_0)y_0$ булса, ягъни $k_1k_2=k_0$, $k_2(1-k_1)x_1+(1-k_2)x_2=(1-k_1k_2)x_0$; $k_2(1-k_1)y_1+(1-k_2)y_2=(1-k_1k_2)y_0$ шартлары үтәлгәндә, M ның M'' га

чагылдыруы коэффициенты k_0 һәм үзәге $S_0(x_0, y_0)$ булган гомотетия булыр. Әгәр $k_1k_2 \neq 1$ булса, M ның M'' га чагылдыруы $k_0 = k_1k_2$ коэффициентлы гомотетия була, $S_0(x_0, y_0)$ ноктасы гомотетия үзәге була:

$$x_0 = \frac{1}{1 - k_1k_2}(k_2(1 - k_1)x_1 + (1 - k_2)x_2),$$

$$y_0 = \frac{1}{1 - k_1k_2}(k_2(1 - k_1)y_1 + (1 - k_2)y_2).$$

Әгәр $k_1k_2 = 1$ булса, (*) тигезлекләре түбәндәге рәвешне ала:

$$x'' = x + (1 - k_2)(x_2 - x_1); \; y'' = y + (1 - k_2)(y_2 - y_1).$$

Бу очракта $k_2 = 1$ булганда (димәк, һәм $k_1 = 1$) табабыз: $x''=x$, $y'' = y$ — бердәй чагылдыру.

$k_2 \neq 1 (k_1k_2 = 1)$ булганда табылган формулалар $\vec{a} = (1-k_2)\overrightarrow{S_1S_2}$ параллель күчерүен билгелиләр. $S_1 \neq S_2$ дип уйланыла.

9. Эзләнелә торган l турысының тигезләмәсен $y = kx + b$ рәвешендә язабыз, монда k һәм b ны табарга кирәк. l турысы $y = 2x - 5$ турысына параллель булганлыктан, $k = 2$. Нокта $A \in l$, шуңа күрә $-1 = 2 \cdot 3 + b$, моннан $b = -7$.

Җавап. $y = 2x - 7$.

10. $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$, $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

11. Әгәр $M(x, y)$ ноктасының координаталары

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 = k^2$$

тигезләмәсен яки аңа тамырдаш булган

$$\left(x - \frac{a_1 + b_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2 + b_2}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4}$$

тигезләмәсен канәгатьләндерсәләр, бу нокта шул күплеккә була. $\frac{k^2}{4} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4} > 0$ булганда, бу тигезләмә радиусы $\sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4}}$ га тигез, үзәге AB кисемтәсенең уртасы булган әйләнәне билгели. $\frac{k^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4} = 0$ булганда, тигезләмә бердәнбер ноктаны — $[AB]$ нең уртасын билгели. $\frac{k^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4} < 0$ булганда, эзләнелгән күплек буш күплек була.

12. $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 - (x - b_1)^2 - (y - b_2)^2 = k^2$ яки

$$(b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)y = \frac{1}{2}(k^2 - a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 + b_2^2).$$

Табылган тигезләмә (AB) на перпендикуляр турыны билгели.

13. A, B һәм C нокталары ординаталар күчәренә параллель булмаган бер туры өстендә ятсын өчен, AB һәм AC турыларының почмакча коэффициентлары тигез, ягъни

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$

булуы кирәк һәм шул җитә дә. Әгәр бу нокталар ординаталар күчәренә параллель булган туры өстендә ятсалар, ул вакытта $x_1=x_2=x_3$.

14. Өчпочмак түбәләренең координаталары $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(a;\ b)$ булырлык итеп, координаталар системасы сайлап алабыз. Ул вакытта BC ягының уртасы A_1 нең координаталары $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b}{2}\right)$ гә, ә AA_1 медианасын $2:1$ чагыштырмасында бүлүче G ноктасының координаталары $\left(\frac{a+1}{3},\ \frac{b}{3}\right)$ кә тигез булыр, чөнки $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. BB_1 һәм CC_1 медианаларын шул ук чагыштырмада бүлүче нокталарның координаталарын шул ук юл белән исәпләп, бу нокталарның G белән тәңгәл килүенә ышанабыз.

15. $k_1=\operatorname{tg}\alpha,\quad k_2=\operatorname{tg}(\alpha+90^\circ)=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ k_1\cdot k_2=-1.$

16. AB һәм CD турыларының почмакча коэффициентлары тиңдәшле рәвештә $k_1=\frac{b_2-a_1}{b_1-a_1}$ гә, ә $к_2=\frac{d_2-c_2}{d_1-c_1}$ гә тигез. AB һәм CD кисемтәләренең перпендикулярлык шарты 15 нче мәсьәлә нигезендә түбәндәгечә була:

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}\cdot\frac{d_2-c_2}{d_1-c_1}=-1 \text{ яки } (b_2-a_2)(d_2-c_2)+(b_1-a_1)(d_1-c_1)=0.$$

17. 1 нче юл. $M(x_0,\ y_0)$ ноктасы аша l турысына MA, $A(x,\ kx+b)$ перпендикулярын үткәрәбез.

$$|AM|^2=(x-x_0)^2+(kx+b-y_0)^2. \qquad (1)$$

$B(0,\ b)$ — l ның Oy күчәре белән кисешү ноктасы. Пифагор теоремасы буенча MAB турыпочмаклы өчпочмагы өчен табабыз: $|BA|^2+|AM|^2=|BM|^2$, яки координаталар аша

$$x^2+k^2x^2+(x-x_0)^2+(kx+b-y_0)^2=x_0^2+(b-y_0)^2,$$

моннан $x=\frac{x_0+ky_0-kb}{1+k^2}$. x ның табылган кыйммәтен (1) формуласына куеп, язабыз:

$$|AM|=\frac{|kx_0+b-y_0|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

2 нче юл. A ноктасы $y=kx+b$ турысыныкы булсын. Бирелгән $M(x_0,\ y_0)$ ноктасыннан $A(x,\ kx+b)$ ноктасына кадәр ераклыкны

$$\rho^2=(x-x_0)^2+(kx+b-y_0)^2$$

яки

$$\rho^2 = (1 + k^2)x^2 + 2(bk - ky_0 - x_0)x + (x_0^2 + y_0^2 + b^2 - 2by_0) \qquad (2)$$

формуласы буенча исәплибез. M ноктасыннан турыга кадәр ераклык бу өчбуынның иң кечкенә кыйммәтенә тигез.

18. Координаталар системасын аның башлангычы квадратның үзәге белән тәңгәл килерлек, ә күчәрләре квадратның капма-каршы түбәләре аша үтәрлек итеп сайлыйбыз. Квадрат түбәләренең координаталары: $A(a, 0)$, $B(0, a)$, $C(-a, 0)$, $D(0, -a)$, квадратның үзәге аша үтүче турының тигезләмәсе $y = kx$. 17 нче мәсьәләдә табылган формула буенча квадрат түбәләреннән $y = kx$ турысына кадәр булган ераклыкларның квадратлары суммасын исәплибез:

$$\frac{1}{1+k^2}(k^2a^2 + a^2 + k^2a^2 + a^2) = \frac{2(1+k^2)a^2}{1+k^2} = 2a^2.$$

Табылган сумма k га бәйле түгел.

19. $|AB|^2 = 5$, $|AC|^2 = 18$, $|BC|^2 = 17$. Косинуслар теоремасы буенча $\cos\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, ул вакытта $\sin\hat{A} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{5}\times$ $\times\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{9}{2}$.

20. Якларының озынлыклары квадратларын исәпләгез һәм косинуслар теоремасын файдаланыгыз.

Җавап. Тигезьянлы, кысынкыпочмаклы.

21. Координаталар системасын аның башлангычы — квадратның үзәге белән, ә күчәрләре квадратның яклары белән параллель булырлык итеп сайлагыз.

22. Координаталар системасын параллелограмм түбәләренең координаталары $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $D(b, c)$, $C(a+b, c)$ булырлык итеп сайлагыз.

23. Координаталар системасын турыпочмаклык түбәләренең координаталары $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b), $(0, b)$ булырлык итеп сайлагыз.

Җавап. Яссылык тулысынча.

24. Бирелгән әйләнәләрнең тигезләмәләрен язабыз: $x^2+y^2=1$, $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, димәк, $r_1 = 1$, $O_1(0, 0)$; $r_2 = \frac{1}{2}$, $O_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Гомотетиянең эзләнелә торган S_1 һәм S_2 үзәкләре $[O_1O_2]$ сен эчтән һәм тыштан $r_1 : r_2 = 2:1$ чагыштырмасында бүләләр. $S_1\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $S_2(1, 0)$.

25. $M(x_0, y_0)$ ноктасы бирелгән әйләнәнеке, димәк, $x_0^2+y_0^2=R^2$. $y = kx + b$ орынмасы M ноктасы аша үтә, шуңа күрә $y_0 = kx_0+b$, моннан $b = y_0 - kx_0$. Орынма (OM) на перпендикуляр, шуңа күрә аның почмакча коэффициенты k мондый:

$$k = -\frac{1}{k_{OM}} = -\frac{x_0}{y_0}. \text{ Ул вакытта } b = y_0 + \frac{x_0^2}{y_0},\ b = \frac{R^2}{y_0}.$$

k һәм b ның табылган кыйммәтләрен $y = kx + b$ тигезләмәсенә куеп, орынма тигезләмәсен табабыз:

$$x_0x + y_0y = R^2.$$

26. Координаталар башлангычы тирәсендә $-\beta$ почмагына борганда, $E'(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ ноктасы $E''(x,\ y)$ ноктасына чагылдырыла, ул вакытта 3 нче мәсьәләнең формулалары буенча

$$x = \cos\alpha\cdot\cos(-b) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta),$$

ягъни,

$$x = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Икенче яктан, E'' ноктасының координаталары $\cos(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, шуңа күрә

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

27. Әгәр $M(x,\ y)$ һәм $M'(x',\ y')$ нокталары $A(a,\ b)$ үзәгенә карата симметрик булсалар, $\frac{x+x'}{2} = a$, $\frac{y+y'}{2} = b$, моннан $x = 2a - x'$, $y = 2b - y'$ булуы килеп чыга. Табылган аңлатмаларны парабола формуласына куябыз: $y = x^2 : 2b - y' = (2a - x')^2$ яки $y' = -x'^2 + 4ax' + 2b - 4a^2$. Әгәр $4a = m$, $2b - 4a^2 = n$, ягъни $a = \frac{m}{4}$, $b = \frac{m^2+4n}{8}$ дип алсак, мәсьәләнең шартын $\left(\frac{m}{4},\ \frac{m^2+4n}{8}\right)$ ноктасына карата симметрия канәгатьләндерә.

28. 6 нчы мәсьәлә буенча үзәге $S(x_0,\ y_0)$ һәм коэффициенты k булган гомотетиядә $x' = kx + (1-k)x_0$, $y' = ky + (1-k)y_0$, моннан $x = \frac{1}{k}(x' - (1-k)x_0)$, $y = \frac{1}{k}(y' - (1-k)y_0)$.

Бу аңлатмаларны тигезләмәгә куябыз:

$$y = x^2 : \frac{1}{k}(y' - (1-k)y_0) = \frac{1}{k^2}(x' - (1-k)x_0)^2.$$

Рәвешүзгәртүләрдән соң

$$y' = \frac{1}{k}x'^2 - \frac{2(1-k)x_0}{k}x' + \frac{(1-k)^2x_0^2}{k} + (1-k)y_0.$$

Әгәр $\frac{1}{k} = p$ дип алсак, эзләнелә торган гомотетия ачыклана:

$$\frac{2(k-1)x_0}{k} = q,\quad \frac{(1-k)^2x_0^2}{k} + (1-k)y_0 = r, \text{ моннан}$$

$$k = \frac{1}{p},\quad x_0 = \frac{q}{2(1-p)},\quad y_0 = \frac{q^2-4pr}{4(1-p)}.$$

29. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$ (28 нче мәсьәләне кара).

30. Параболаның тигезләмәсе $y=x^2$ булырлык координаталар системасы сайлыйбыз. Параболаның бирелгән нокталарының координаталары $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$, $D(d, d^2)$ булсын. AB турысының почмакча коэффициенты $k_{AB}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=$ $=a+b$. Аналогик рәвештә $k_{CD}=c+d$, $k_{AC}=a+c$, $k_{BD}=b+d$, $k_{AD}=a+d$, $k_{BC}=b+c$. Әгәр $\alpha-(AB)$ ның абсцисса күчәренә авышу почмагы булса, (CD) ның абсцисса күчәренә авышу почмагы $(180°-\alpha)$ була. Ләкин $\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}(180°-\alpha)$, шуңа күрә $k_{AB}=-k_{CD}$ яки $a+b=-c-d$. Соңгы тигезләмәдән $a+c=$ $=-b-d$, $a+d=-b-c$ булуы килеп чыга һәм шуның белән мәсьәлә исбатлана.

31. Параболага орынма ниндидер кисүчегә параллель һәм аның парабола белән тик бер генә уртак ноктасы бар. $A_1(x_1, x_1^2)$, $A_2(x_2, x_2^2)$ — параболаның ике ноктасы булсын. A_1A_2 кисүчесенең тигезләмәсен төзибез: $y=kx+b$. (A_1A_2) ның почмакча коэффициенты $k=x_1+x_2$ (30 нчы мәсьәләне кара). b ның кыйммәтен $A_1(x_1, x_1^2)$ ноктасының бу турыныкы булу шартыннан табабыз: $x_1^2=(x_1+x_2)x_1+b$, моннан $b=-x_1x_2$. Кисүченең тигезләмәсе түбәндәгечә була:

$$y=(x_1+x_2)x-x_1x_2.$$

Әгәр $x_1=x_2=x_0$ дип алсак, параболага $M(x_0, x_0^2)$ ноктасындагы орынма тигезләмәсен табабыз: $y=2x_0x-x_0^2$.

32. $A_1(a_1, a_1^2)$, $A_2(a_2, a_2^2)$ — орыну нокталары булсын. Орынмаларның тигезләмәләре (31 нче мәсьәләне кара):

$$y=2a_1x-a_1^2,\quad y=2a_2x-a_2^2.$$

$M(a, b)$ ноктасы бу орынмалар өстендә ята. Шуңа күрә $b=$ $=2a_1a-a_1^2$, $b=2a_2a-a_2^2$. Димәк, a_1 һәм a_2 $t^2-2at+b=0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары булалар, ул вакытта $a_1+a_2=2a$, $a_1\cdot a_2=b$ була. A_1A_2 кисүчесенең тигезләмәсе: $y=(a_1+a_2)x-a_1a_2$, ягъни $y=2ax-b$ була.

33. Бирелгән нокталарның координаталары: $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$, $D(d, d^2)$, $E(e, e^2)$, $F(f, f^2)$ булсын. AB турысының почмакча коэффициенты $k_{AB}=(a+b)$. Шул рәвешле калган турыларның да почмакча коэффициентларын язарга мөмкин. Параллельлек шартыннан

$$\left.\begin{array}{l}[AB]\parallel[DE]\Rightarrow a+b=d+e\\ [BC]\parallel[EF]\Rightarrow b+c=e+f\end{array}\right\}\Rightarrow c+d=f+a$$

икәнлеге килеп чыга, моның нәтиҗәсендә $[CD]\parallel[FA]$ була.

Әгәр бу нокталар $xy=p^2$ гиперболасы өстендә ятсалар, аларның координаталарын болай язарга мөмкин: $A\left(a, \frac{p^2}{a}\right)$, $B\left(b, \frac{p^2}{b}\right)$, ... , AB хордасының почмакча коэффициенты

$$k_{AB}=\frac{\frac{p^2}{b}-\frac{p^2}{a}}{b-a}=-\frac{p^2}{ab}.$$

$$\begin{matrix}[AB]\parallel[DE]\Rightarrow ab=de\\ [BC]\parallel[EF]\Rightarrow bc=ef\end{matrix}\Rightarrow cd=fa,$$

моның нәтиҗәсендә $[CD]\parallel[FA]$.

34. (AB) на перпендикуляр CC_1 турысының тигезләмәсен төзибез:

$$y=kx+b,\ k_{AB}=\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2},\ k=x_1x_2.$$

$C\in(CC_1)$, шуңа күрә $\frac{1}{x_3}=x_1x_2x_3+b$, моннан $b=\frac{1}{x_3}-x_1x_2x_3$. CC_1 турысының тигезләмәсе $y=x_1x_2x+\frac{1}{x_3}-x_1x_2x_3$ икән. Шуңа аналогик рәвештә (BC) на перпендикуляр AA_1 турысының тигезләмәсе $y=x_2x_3x+\frac{1}{x_1}-x_1x_2x_3$ була. Табылган тигезләмәләр системасын чишеп, H ноктасының координаталарын табабыз: $\left(-\frac{1}{x_1x_2x_3}, -x_1x_2x_3\right)$. Моннан H ноктасының $xy=1$ гиперболасында ятканлыгы ачык.

§ 7. КООРДИНАТАЛЫ-ВЕКТОРЛЫ МЕТОД [1]

1. 1) (10; −8), 2) (−5; 4), 3) (−20; 16), 4) $\left((1; -\frac{4}{5}\right)$

2. $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$.

3. 1) $\left(\frac{3}{4}; 4\right)$, 2) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$; 3) $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

4. 1) $\left(0; \frac{7}{3}\right)$, 2) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

5. 1) (5; 0), 2) (−1; −2), 3) (−5; 0).

6. 1) (8; 7), 2) (7; 2), 3) (5; −8), 4) (13; 10).

7. 1) (1; 4), 2) (1; 0), 3) (0; −1), 4) (7; 6).

8. $k=7$.

9. $M\left(0; \frac{7}{2}\right)$, $N\left(\frac{3}{2}; 3\right)$, $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{MN}\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{NP}\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{PM}\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

---

[1] II, III кушымталарны карагыз, 218 нче бит.

10. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $D(x, y)$, $\begin{cases} -1-2 = 1-x, \\ 4-3 = 1-y, \end{cases}$ $x = 4$, $y = 0$.

2) (0; 6), 3) (−2; 2).

11. $\overrightarrow{AA_1}\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{CC_1}\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

12. $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

13. $\overrightarrow{AB}(4; 6)$, $\overrightarrow{CD}(-2; -3)$, $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$.

14. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, $C \notin (AB)$, $ACBD$.

15. $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AC}$, $C \notin (AB)$, $ACDB$.

16. $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$ яки $mq - np = 0$.

17. $M(x, y)$ ноктасы бирелгән туры өстендә ятсын өчен, $\overrightarrow{AM}$ һәм $\vec{p}$ векторларының коллинеар булуы кирәк һәм шул җитә.

1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1}$; $x - 4y - 6 = 0$; 2) $3x + y - 4 = 0$;

3) $y - 2 = 0$.

18. $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ — бирелгән турының ике ноктасы булсын: $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$, моннан

$$y_1 = \frac{C - Ax_1}{B},\ y_2 = \frac{C - Ax_2}{B},\ B \neq 0,\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(C - Ax_2) - (C - Ax_1)}{B(x_2 - x_1)} = \frac{A}{-B}.$$

Димәк, $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{p}$. Әгәр $B = 0$ булса, исбатлау үзеннән-үзе аңлашыла.

19. $m_1 = 4$, $m_2 = -4$.

20. $m = |\vec{a}|\cos\alpha$, $n = |\vec{a}|\sin\alpha$, $p = |\vec{b}|\cos(\alpha + 90°)$, $q = |\vec{b}|\sin(\alpha + 90°)$, $p = -|\vec{b}|\sin\alpha$, $q = |\vec{b}|\cos\alpha$, $mp + nq = -|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha\sin\alpha + |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha\cos\alpha = 0$. Кирәклелек исбатланды.

21. $\widehat{(\vec{i}, \vec{a})} = \alpha$, $|\vec{a}|\cos\alpha = x_0$, $|\vec{a}|\sin\alpha = y_0$,

$\vec{b}(x, y)$, $x = |\vec{b}|\cos(\alpha + 90°) = -|\vec{a}|\sin\alpha = -y_0$,

$y = |\vec{b}|\sin(\alpha + 90°) = |\vec{a}|\cos\alpha = x_0$, $\vec{b}(-y_0, x_0)$.

22. Координаталар башлангычы тирәсендә φ почмагына борганда, $x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$. Әгәр $\varphi = 90°$ булса, $x' = -y$, $y' = x$.

$A_1(-1; 1)$, $B_1(1; 2)$, $C_1(-4; -1)$.

23. Туры $\vec{n}$ векторына перпендикуляр булган $\vec{p}$ векторына параллель. 21 нче мәсьәлә буенча $\vec{p}(-1; -4)$. Турының тигезләмәсе: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{-4}$ яки $4x - y - 11 = 0$ (17 нче мәсьәләне кара).

24. $D(x, y)$, $\overrightarrow{AB}(3; 1)$, $\overrightarrow{AD}(x-1, y+2)$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. 20 нче мәсьәлә буенча $3(x-1)+(y+2)=0$. $|AB|^2=|AD|^2$, шуңа күрә $10=(x-1)^2+(y+2)^2$. Табылган тигезләмәләр системасының ике чишелеше бар: (2; −5) һәм (0; 1). $C(x, y)$ ноктасының координаталарын табу өчен, AC һәм BD кисемтәләренең урталары тәңгәл килүен исәпкә алабыз, шуның нәтиҗәсендә

1) $\begin{cases} 1+x=4+2, \\ -2+y=-1-5, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1+x=4+0, \\ -2+y=-1+1, \end{cases}$

моннан $C_1(5; -4)$, $C_2(3; 2)$.

Җавап. Мәсьәләнең ике чишелеше бар: $C_1(5; -4)$, $D_1(2; -5)$; $C_2(3; 2)$, $D_2(0; 1)$.

25. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Әгәр B ноктасының координаталары (x, y) булса, M ноктасы $[BD]$ нең уртасы икәнен искә алганда, D ның координаталары $(1-x, -1-y)$ булыр.

$$\overrightarrow{AB}(x-2, y+4),\ \overrightarrow{AD}(-x-1, 3-y).\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)(-x-1)+(y+4)(3-y)=0;\ |AB|^2=|AD|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+4)^2=(x+1)^2+(3-y)^2.$$

Килеп чыккан тигезләмәләр системасының ике чишелеше бар: (4; 1) һәм (−3; −2). B түбәсенең координаталары буенча D ның координаталарын исәплибез:

әгәр $B(4; 1)$ икән, $D(-3; -2)$ була;
әгәр $B(-3; -2)$ икән, $D(4; 1)$ була.

26. 18 нче мәсьәлә буенча беренче туры $\vec{p}_1(1; 3)$ векторына параллель, икенче туры $\vec{p}_2(-3; 1)$ векторына параллель. 20 нче мәсьәлә буенча турылар перпендикулярлар, чөнки $1\cdot(-3)+$ $+3\cdot 1=0$.

27. Туры $\vec{p}(-3; 5)$ векторына параллель, $|\vec{p}|=\sqrt{34}$;

$$\vec{p}_0\left(-\frac{3}{\sqrt{34}}; \frac{5}{\sqrt{34}}\right).$$

28. $k=\frac{13}{8}$.

§ 8. МӘЙДАННАР

1. Өчпочмакның урта сызыгы аннан мәйданы бирелгән дүртпочмак мәйданының $\frac{1}{4}$-е кадәр булган өчпочмак кисеп алуын исбат итегез.

2. Нигезләре тигез булган тигеззурлыктагы өчпочмакларның биеклекләре тигез; димәк, дүртпочмакның ике чиктәш түбәсе каршы ятучы яктан тигез ераклашканнар. Урта сызык трапеция нигезләренең урталары аша үтә.

3. $ABCD$ дүртпочмагының урта сызыклары $PQRS$ параллелограммының диагональләре булып торалар һәм аны тигез зурлыктагы дүрт кисәккә бүләләр. BPQ, DSR һәм ASP, CQR өчпочмакларының мәйданнары суммасы тигез, чөнки һәрберсе бирелгән дүртпочмак мәйданының $\frac{1}{4}$ енә тигез.

4. $W=(SC)\cap(UV)$, $D=(SC)\cap(AB)$;

$$S_{ADWV}=2S_{ACV},\ S_{ACMN}=2S_{ASC},\text{ ләкин } S_{ACV}=S_{ASC}$$

($ASCV$ — параллелограмм), шуңа күрә $S_{AGMN}=S_{ADWV}$. Аналогик рәвештә $S_{DBUW}=S_{BCPQ}$.

5. Эзләнелә торган турының MAN почмагы белән чикләнгән MN кисемтәсе P ноктасы белән урталай бүленә, шуны исбат итегез. Моның өчен P ноктасы аша теләсә нинди башка $M'N'$ турысы үткәрү ($|PN'|>|PM'|$ булсын) һәм $S_{PMM'}<S_{PNN'}$ икәнен исбат итү җитә. Әгәр нокта аша (AN) на параллель туры үткәрсәк, соңгы тигезсезлекнең дөреслеге үзеннән-үзе ачыклана. Соңгы туры $M'N'$ кисемтәсенең дәвамын кисеп үтә.

6. $|AM|=\frac{1}{n}|AB|$, $|CN|=\frac{1}{n}|CD|$ булсын, ул вакытта

$$S_{BDM}=\frac{n-1}{n}S_{ABD},\ S_{DBN}=\frac{n-1}{n}S_{BCD}\rightarrow$$

$$\rightarrow S_{BDM}+S_{DBN}=S_{MBND}=\frac{n-1}{n}S_{ABCD}.$$

Аналогик рәвештә

$$S_{MCNA}=\frac{1}{n}S_{ABCD},$$

димәк,

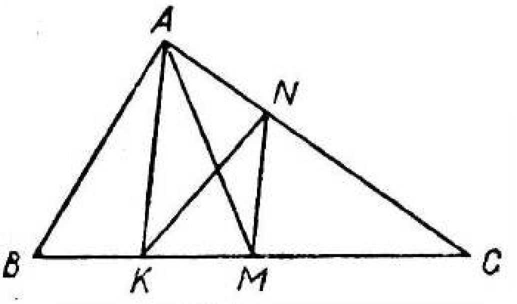
$$S_{MBND}+S_{MCNA}=S_{ABCD}$$

$$\text{яки } S_{ABCD}-S_{MQNP}+S_{BCQ}+S_{DPA}=S_{ABCD},$$

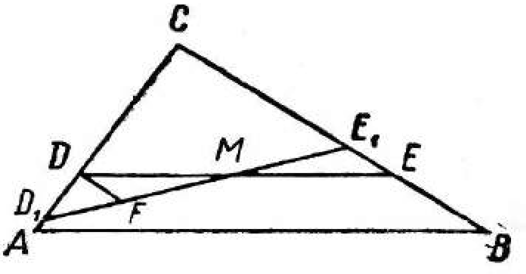
$$\text{моннан } S_{MQNP}=S_{BCQ}+S_{DPA}.$$

7. Бирелгән K ноктасы ABC өчпочмагының BC ягында ятсын (234 нче рәсем). Әгәр K ноктасы $[BC]$ нең уртасы икән, (AK) — эзләнелгән туры була. Әгәр $|BK|<|BM|$ икән (монда M — $[BC]$ кисемтәсенең уртасы), $[MN]\parallel[AK]$ ны төзеп, эзләнелгән KN турысын табабыз. Чыннан да, $S_{AMN}=S_{KMN}$ булганга күрә, $S_{KCN}=S_{ACM}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.

8. Әгәр медианаларның кисешү ноктасы аша үткәрелгән туры өчпочмакның ягына параллель булса (235 нче рәсем), мәсьәлә шартында күрсәтелгән мәйданнар чагыштырмасы $\frac{4}{5}$ кә тигез, калган очракларда ул зуррак була (5 нче мәсьәләне кара).



234 нче рәсем



235 нче рәсем

9. $\widehat{BCM}=\widehat{CMD}=\widehat{MDA}$ (236 нчы рәсем) һәм $\widehat{CBM}=\widehat{DMA}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\triangle BCM \sim \triangle MDA \Rightarrow \frac{|BC|}{|MD|}=\frac{|CM|}{|AD|}\Rightarrow\frac{|BC|}{|MD|}\cdot\frac{|MC|}{|MC|}=\frac{|CM|}{|AD|}\times$$

$$\times\frac{|MD|}{|MD|}\Rightarrow\frac{S_{BCM}}{S_{MDC}}=\frac{S_{MDC}}{S_{AMD}}.$$

10. Яңа өчпочмаклар бирелгән өчпочмакка охшашлар; димәк, аларның мәйданнары чагыштырмасы охшаш якларының квадратлары чагыштырмасына тигез.

11. Юк. BD диагонале AC диагоналең урталай бүлә торган кабарынкы дүртпочмакны карау җитә. $[BD]$ нең уртасын M дип алырга.

12. $S_{DMM_1}=S_{N_1MM_1}$ һәм $S_{MN_1N}=S_{BN_1N}\Rightarrow S_{DMBN_1}=2S_{MNN_1M_1}$ икәненә ышаныгыз.

DB диагоналең төзегез,

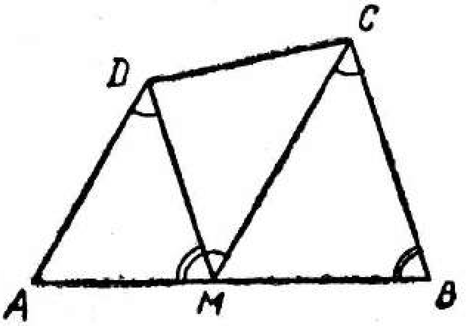
$$S_{ADM}=\frac{1}{3}S_{ADB} \text{ һәм } S_{CBN_1}=\frac{1}{3}S_{CBD}$$

икәнен искәрегез.

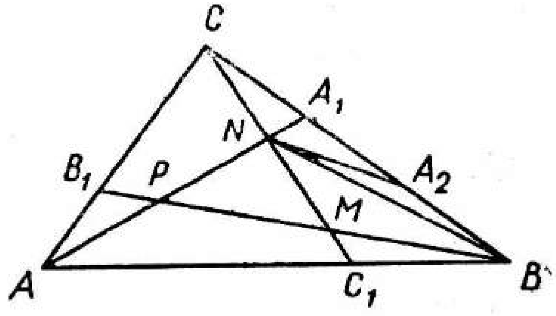
13. Һәр кисемтәнең башка кисешү нокталары белән өч тигез кисәккә бүленүен исбат итегез.

14. $S_{ABC}=1$ дип алабыз (237 нче рәсем).

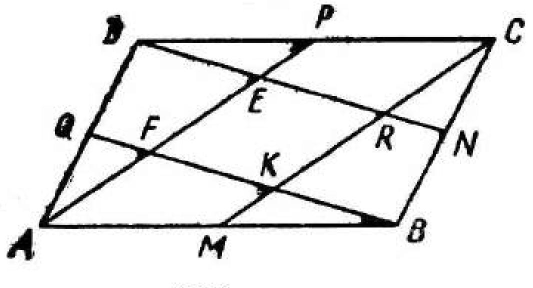
$S_{CNA_1}=S_{A_1NA_2}=S_{A_2NB}=z$ икәнен искәрәбез, монда A_2 ноктасы — $[A_1B]$ нең уртасы; $S_{C_1NB}=\frac{1}{3}-3z$, ләкин $S_{ANC_1}=2S_{C_1NB}$. $S_{AA_1B}=S_{ANC_1}+S_{CC_1B}-S_{CNA_1}$, шуңа күрә $\frac{2}{3}=2\left(\frac{1}{3}-3z\right)+\frac{1}{3}-z$, моннан $z=\frac{1}{21}$.



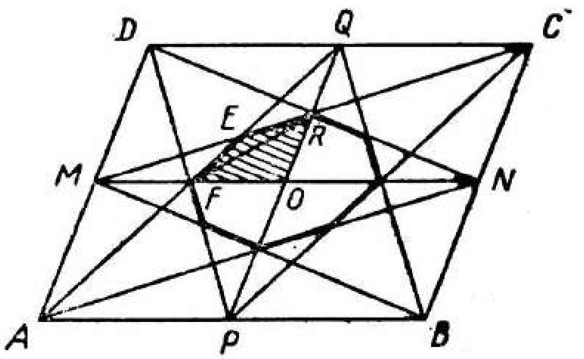
236 нчы рәсем



237 нче рәсем



238 нче рәсем



239 нчы рәсем

Димәк,

$$S_{MNP}=1-3\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{21}=\frac{1}{7}.$$

15. Параллелограмм, чөнки капма-каршы яклары параллель турылар өстендә яталар (238 нче рәсем). Төзелгән турылар параллелограммнан өчпочмаклар кисеп ала, ул өчпочмакларның һәркайсының мәйданы бирелгән параллелограмм мәйданының $\frac{1}{4}$ енә тигез. $\triangle MBK\cong\triangle PDE\Rightarrow S_{MKQA}=S_{DEA}\Rightarrow S_{MKFA}=S_{OFED}$ икәнен күрәбез, чөнки AFQ өчпочмагы аларның уртак өлеше булып тора. Шулай булгач, $S_{AFQ}=S_{MBK}$, ләкин $S_{MBK}=\frac{1}{4}S_{ABF}$; димәк, $S_{MBK}=\frac{1}{20}S_{ABCD}$, ә $S_{PKRS}=\frac{1}{5}S_{ABCD}$.

16. $S_{ADM}=S_{ANB}=\frac{1}{4}S_{ABCD}\Rightarrow S_{PND}=S_{MPB}$, ләкин

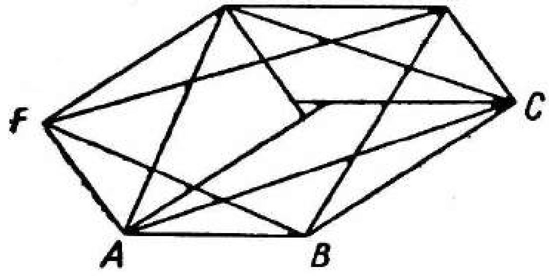
$$S_{PND}=S_{ANP} \text{ һәм } S_{MPB}=S_{AMP}\rightarrow S_{AMPN}=$$

$$=\frac{2}{3}S_{AMD}\Rightarrow S_{AMPN}=\frac{1}{6}S_{ABCD}.$$

17. $\dfrac{kl(k+l+2)}{2(k+l)(l+1)(k+l+1)}$.

18. Мәйданы $ABCD$ параллелограммы мәйданының $\frac{1}{4}$ енә тигез булган $MOQD$ параллелограммын карагыз (239 нчы рәсем);

$$S_{PORE}=S_{FOR}+S_{RFE}=\frac{1}{4}S_{MOQ}+\frac{1}{12}S_{MOQ}=\frac{1}{3}S_{MOQ}=\frac{1}{6}S_{MOQD}.$$



240 нчы рәсем

20. ACE һәм BDF өчпочмакларының мәйданнарын бирелгән алтыпочмакның мәйданы һәм өчпочмак мәйданы белән чагыштырыгыз. Бу өчпочмакның яклары — алтыпочмакның капма-каршы якларының аермасына тигез булган кисемтәләр (240 нчы рәсем).

21. Түбәндәге үзлектән файдаланыгыз. Әгәр ABC өчпочмагының

AM медианасы өстендә нинди дә булса O ноктасын алсак, $S_{ABO} = S_{ACO}$.

$ABCDE$ бишпочмагы бирелгән. A, B, D һәм E түбәләре аша үтүче кисемтәләр O ноктасында кисешсеннәр. O ноктасының бишенче кисемтә өстендә ятканын раслау өчен, $S_{EOC} = S_{AOC}$ икәнлеген исбатлау житә.

Болай яза алабыз:

$$S_{EOC} = S_{EOB},\ S_{EOB} = S_{DOB},\ S_{DOB} = S_{DOA},$$

$$S_{DOA} = S_{AOC} \Rightarrow S_{EOC} = S_{AOC},$$

димәк, (CO) турысы $[AF]$ сен аның уртасыннан кисеп үтә.

22. AB ягының уртасы K аша (CD) ягына параллель туры үткәрегез, M һәм N — аның (BC) һәм (AD) белән кисешү нокталары булсын. KBM һәм KNA өчпочмаклары тигез зурлыкта, шуңа күрә $ABCD$ трапециясенең мәйданы $MNDC$ параллелограммының мәйданына, ягъни ab га тигез.

23. Дүртпочмак якларының урталары ромбның түбәләре була, ә ромбның диагональләре — дүртпочмакның урта сызыклары. Ромбның мәйданы дүртпочмак мәйданының яртысына тигез.

24. $S = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

25. Камаулы турыпочмаклыкның яклары квадратның диагональләренә параллель, шуны исбат итегез.

Җавап. $\sqrt{2(a^2 - S)}$.

26. ABC өчпочмагының CH биеклеген төзибез. $[HB_1]$ — AC ягына үткәрелгән перпендикуляр, ә $[HA_1] \perp [BC]$ булсын. Ул вакытта HB_1CA_1 дүртпочмагын камаучы $|CH| = h$ диаметрлы әйләнә үткәрергә мөмкин. Синуслар теоремасы буенча $|A_1B_1| = h \sin \hat{C}$. Аннан соң $\widehat{BCH} = \widehat{ACO}$ икәнен исбат итегез (монда O — ABC өчпочмагын камаучы әйләнәнең үзәге). Ул вакытта $[CO] \perp [A_1B_1]$ һәм $S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2} |CO| \cdot |A_1B_1|$,

$$S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2} R \cdot h \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \frac{c}{2 \sin \hat{C}} h \cdot \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ch}{2},$$

ягъни

$$S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

§ 9. МЕТРИК БӘЙЛӘНЕШЛӘР

1. $|AB| = c$, $|BC| = a$, $c > a$ булсын. Ул вакытта $\hat{C} > 75°$, $\hat{B} < 30°$. Өчпочмакның биеклеге $|CC_1| = h_c$ ны төзегез. $h_c < \frac{a}{2} < \frac{c}{2}$, ягъни $2h_c < c$ икәнен искәрәбез, ә бу мәсьәләнең шартына каршы килә. $c < a$ бәйләнешенең мөмкин түгеллеген ачыклагыз. $c = a$ һәм $\hat{C} = 75°$ булып кала.

2. M ноктасы (BC) на карата O га симметрияле. OMB өчпочмагы тигезьяклы; $\widehat{AOB} = 150°$, $\widehat{BOM} = 60° \Rightarrow \widehat{AOM} = 150°$, $|AM| = |AB|$, һәм AMB өчпочмагы тигезьянлы, $\widehat{AMB} = 80°$. M һәм C нокталарыннан AB кисемтәсе тигез почмаклар белән күренә; димәк, $ABMC$ дүртпочмагын камаучы әйләнә үткәреп була. $\widehat{MAB} = 20°$, шуңа күрә дә $\widehat{MCB} = 20°$, ә симметрия нигезендә $\widehat{BCO} = 20°$, димәк, $\widehat{ACO} = 60°$.

3. $ABCE$ дүртпочмагы — тигезьянлы трапеция, димәк, CED өчпочмагы тигезьяклы:

$$|CE| = 2a, \ S_{ABCDE} = S_{ABCE} + S_{CED};$$

$$S_{ABCDE} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} + a^2\sqrt{3}. \ S_{ABCDE} = \frac{7}{4}a^2\sqrt{3}.$$

6. $c^2(a^2 + b^2) = (a^2 - b^2)^2$.

7. $\frac{a}{2}$.

8. M_1 ноктасы — CD медианасының уртасы булсын (241 нче рәсем), ул вакытта $|B_1M_1| = |M_1A_1| = \frac{c}{4}$, $|CM_1| = \frac{m_c}{2}$, $|M_1G| = \frac{m_c}{6}$, монда $m_c = |CD|$. Ләкин $|B_1M_1| \cdot |M_1A_1| = |GM_1| \cdot |M_1C|$. Димәк, $\frac{c^2}{16} = \frac{m_c^2}{12}$. Ләкин $m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2$, шуңа күрә

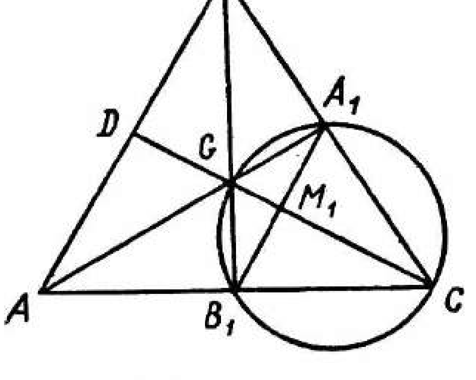
$$\frac{3}{4}c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \text{ һәм } c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

10. $(a^2 + b^2 - c^2)(a + b) = 2ab^2$.

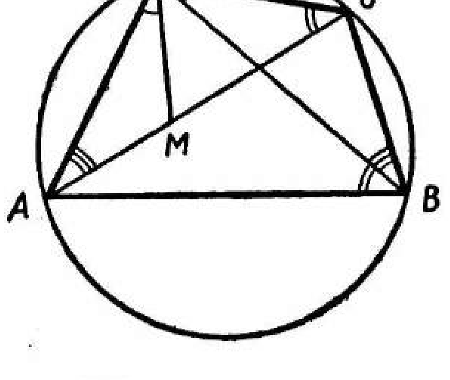
11. $\frac{|AN|}{|NB|} = \frac{|CA| \cdot |\cos\varphi|}{|CB| \cdot |\cos\psi|}$.

12. 1) Тигезьянлы $(a = b)$. 2) Турыпочмаклы $(\hat{C} = 90°)$.

13. M, N, P, Q нокталары тиңдәшле рәвештә AO, BO, DO, BC кисемтәләренең урталары булсын. $\triangle MNQ \cong \triangle MOP$ икәнен исбатлагыз. MQP өчпочмагы тигезьянлы, һәм түбә янындагы

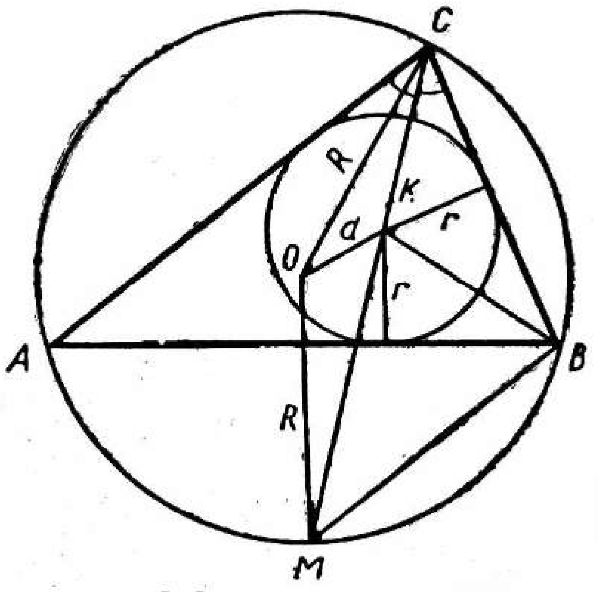


241 нче рәсем



242 нче рәсем

почмагы 60°. (Икенче чишелеше: $|PQ|=|MQ|=\frac{1}{2}|BC|, |MP|= =\frac{1}{2}|AD| \Rightarrow |PQ|= =|MQ|=|MP|.$)



243 нче рәсем

15. Ике өчпочмакта да почмакларының биссектрисалары биеклекләре була, өчпочмаклар тигезьяклы һәм нигез янындагы почмаклары конгруэнт.

16. BDC почмагына конгруэнт булган ADM почмагы төзегез. $M \in [AC]$ (242 нче рәсем).

$$\triangle AMD \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DB|},\ |AM| = \frac{|BC|\cdot|AD|}{|DB|},$$

$$\triangle MDC \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{|MC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|DB|},\ |MC| = \frac{|AB|\cdot|DC|}{|DB|}$$

икәнен күрәбез. Ләкин $|AM|+|MC|=|AC| \Rightarrow |AC|\cdot|BD| = =|BC|\cdot|AD|+|AB|\cdot|DC|$.

18. $|AC|=|CB|=a$, $|CD|=d$, $|AD|=m$, $|DB|=n$ дип тамгалыйк. $[CH]\perp[AB]$ ны ($H\in[AB]$) төзик. Ул вакытта

$$|HB|=|AH|=\frac{m+n}{2},\ |DH|=\frac{n-m}{2}.$$

Турыпочмаклы ACH һәм DCH өчпочмакларыннан язабыз:

$$\left.\begin{aligned}|CH|^2 &= a^2-\left(\frac{m+n}{2}\right)^2,\\ |CH|^2 &= d^2-\left(\frac{n-m}{2}\right)^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow d^2=a^2-mn.$$

19. O — ABC өчпочмагын камаучы әйләнәнең үзәге, ә K — аңа камаулы әйләнәнең үзәге булсын, $[CM]$ — C почмагының биссектриса кисемтәсе, монда M ноктасы камаучы әйләнә өстендә ята (243 нче рәсем).

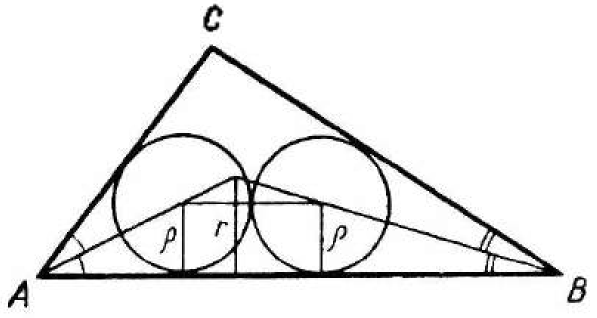
$\triangle MOC$ өчен $d^2=R^2-|CK|\cdot|KM|$ (18 нче мәсьәлә буенча).

$\triangle MKB$ да $\widehat{MKB}=\widehat{MBK}=\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow |MK|=|MB|$, ләкин

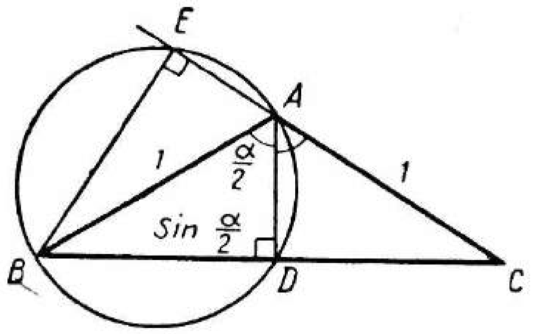
$|MB|=2R\sin\frac{\widehat{C}}{2}$.

$|CK|=\frac{r}{\sin\frac{\widehat{C}}{2}}$ булганлыктан, $d^2=R^2-2Rr$.

20. ABC өчпочмагын камаучы әйләнә үткәрәбез. (CC_1) әйләнәне D ноктасында кисеп үтсен ди. Ул вакытта



244 нче рәсем



245 нче рәсем

$$\triangle ACC_1 \backsim \triangle DCB \Rightarrow \frac{|CC_1|}{|CB|} = \frac{|AC|}{|CD|} \text{ яки } \frac{|CC_1|}{|CB|} = \frac{AC}{|CC_1| + |C_1D|},$$

$$|CC_1|^2 + |CC_1| \cdot |C_1D| = |CB| \cdot |AC|.$$

Ләкин $|CC_1| \cdot |C_1D| = |AC_1| \cdot |C_1B| \Rightarrow |CC_1|^2 = |CB| \cdot |AC| -$ $- |AC_1| \cdot |C_1B|$.

21. (244 нче рәсем) $c = \rho \frac{\cos \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}} + 2\rho + \rho \frac{\cos \frac{\hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{B}}{2}}$ һәм $c = r \frac{\cos \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}} +$

$$+ r \frac{\cos \frac{\hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{B}}{2}} \Rightarrow c = 2\rho + \rho \left(\frac{\cos \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}} + \frac{\cos \frac{\hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{B}}{2}} \right),$$

ләкин $\frac{\cos \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}} + \frac{\cos \frac{\hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{B}}{2}} = \frac{c}{r} \Rightarrow c = 2\rho + \frac{\rho c}{r}$.

27. $\hat{A} = \alpha$ почмаклы тигезьянлы ABC ($|AB| = |AC| = 1$) өчпочмагын карагыз (245 нче рәсем), A ноктасы аша $[BC]$ нә, ә B ноктасы аша (AC) на перпендикулярлар төзегез.

$$|BD| = |DC| = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad |AE| = \cos (180^\circ - \alpha) = - \cos \alpha, \text{ ә}$$

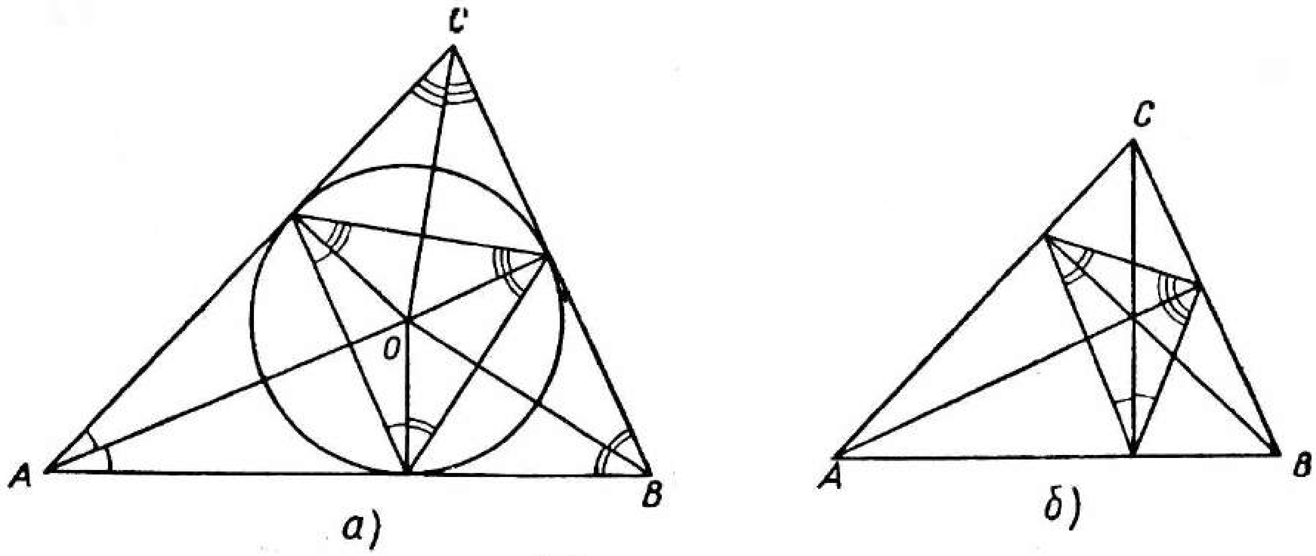
$|CD| \cdot |CB| = |CA| \cdot |CE|$, шуңа күрә $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 1 \cdot (1 - \cos \alpha)$;

$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$. ($\alpha < 90^\circ$ өчен нәтиҗәнең рәвеше беразүзгәрә.)

28. Косинуслар теоремасыннан һәм 27 нче мәсьәләнең чишелешеннән файдаланыгыз.

30. 29 нчы мәсьәләдәге үзара бәйләнешләрне файдаланыгыз.

31. $S = pr$, $r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2}$ бәйләнешләрен, өчпочмак мәйданын исәпләү өчен Герон формуласын файдаланыгыз (p — ярымпериметр, r — өчпочмакка камаулы түгәрәк радиусы).



246 нчы рәсем

33. 1. 29 нчы мәсьәләнең 1) бәйләнешен файдаланыгыз. $c = 2R\sin\hat{C}$, $a = 2R\sin\hat{A}$, $b = 2R\sin\hat{B}$ дип алыштырыгыз.

2. 33 нче мәсьәләнең 1) бәйләнешен бирелгән өчпочмакка камаулы әйләнәнең орыну нокталары түбәләре булып хезмәт иткән өчпочмак өчен кулланыгыз (246 нчы рәсем, *а*).

3. 33 нче мәсьәләнең 1) бәйләнешен бирелгән өчпочмак биеклекләренең нигезләре түбәләре булып хезмәт иткән өчпочмак өчен кулланыгыз (246 нчы рәсем, *б*).

36. $\mathrm{tg}\,\hat{A}\cdot\mathrm{tg}\,\hat{B} = 2$ тигезлегеннән A һәм B почмакларының кысынкы икәнлеге килеп чыга. H — биеклекләрнең кисешү ноктасы, ә C_1 — AB ягына үткәрелгән биеклекнең нигезе булсын. Ул вакытта

$$|HC_1| = |AC_1|\,\mathrm{ctg}\,\hat{B} = |AC|\cos\hat{A}\,\frac{\mathrm{tg}\,\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}|AC|\sin\hat{A} = \frac{|CC_1|}{2}.$$

§ 10. НОКТАЛАРНЫҢ КҮПЛЕКЛӘРЕ

Түбәндә китерелгән кыскача чишелешләрдә кире расламаның исбатлавы күп кенә очракларда төшереп калдырыла.

1. Үзәге AB кисемтәсенең уртасында һәм коэффициенты $\frac{1}{3}$ булган бирелгән гомотетиядә табылган әйләнә, ике ноктасыннан башка.

2. ABC өчпочмагының AC ягына параллель MN урта сызыгы, очларыннан башка.

3. ABC өчпочмагының урта сызыклары белән билгеләнгән өчпочмак (чигеннән башка).

4. AB һәм CD турыларының кисешү ноктасы аша үтүче ике туры, кисешү ноктасыннан башка.

5. $[AB]$ сен диаметр итеп алып төзелгән ачык түгәрәккенеке булмаган (булган) яссылык нокталары; AB турысы нокталары бу күплеккә керми.

6. $ABCD$ квадраты түбәләренең координаталары (a, a), $(a, -a)$, $(-a, -a)$, $(-a, a)$ булган турыпочмаклы координаталар

системасы кертәбез. $P(x, y)$ ноктасыннан AB һәм CD турыларына кадәрге ераклыкларның квадратлары суммасы $(x-a)^2 + (x+a)^2 = 2(x^2+a^2)$ ка тигез, ә (BC) һәм (AD) ларына кадәр ераклыкларның квадратлары суммасы $(y-a)^2+(y+a)^2 = 2(y^2+a^2)$ ка тигез. Табабыз: $2(y^2+a^2) = 2(x^2+a^2)$, моннан $x^2 - y^2 = 0$, яки $(x-y)(x+y) = 0$. AC һәм BD турыларының пары эзләнелгән M күплеге була.

7. Түбәләре бирелгән турылар өстендә яткан һәм ягының озынлыгы $c\sqrt{2}$ булган квадрат.

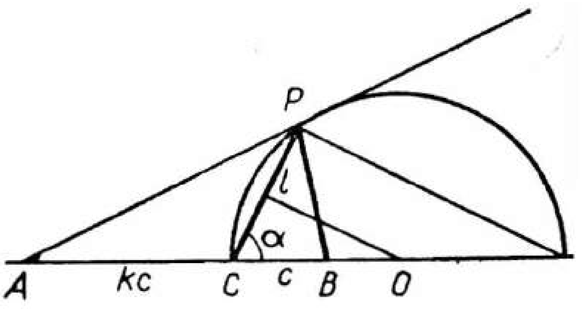
8. ABC өчпочмагының AB нигезенә параллель булган MN урта сызыгы (аның очларыннан башка).

9. Бирелгән әйләнәнең үзәген O аша, радиусын R, ә камаулы ABC өчпочмагының биеклекләре кисешү ноктасын H аша тамгалыйк. ABC өчпочмагының AB ягы билгеләнгән булсын. $\widehat{AHB} = 180° - \widehat{ACB}$ икәнен табабыз, шуңа күрә C түбәсе үзгәрешле булганда H ноктасы AB га карата бирелгән әйләнәгә симметрик булган әйләнә сыза. Бирелгән әйләнәне кисүче R радиуслы барлык шундый әйләнәләр радиусы $3R$ һәм үзәге O булган түгәрәк эчендә яталар.

10. $OPCQ$ дүртпочмагын камаучы R радиуслы әйләнә үткәрәбез. Синуслар теоремасы буенча $2R = \dfrac{d}{\sin(\widehat{AOB})}$ — const, өстәвенә $|OC| = 2R$. Эзләнелгән M күплеге O үзәкле һәм $\dfrac{d}{\sin(\widehat{AOB})}$ радиуслы әйләнә белән AOB почмагының уртак кисәге була.

11. Әгәр C_1D_1 — икенче бер кисүче булып, P_1 ноктасы $[C_1D_1]$ сен бирелгән k чагыштырмасында бүлсә, BCD һәм BC_1D_1 өчпочмакларының охшашлыгыннан һәм $|CP|:|PD| = |C_1P_1|:|P_1D_1|$ тигезлегеннән бу өчпочмаклар белән билгеләнгән охшашлыкта $P \to P_1$ икәне килеп чыга, шуңа күрә $\widehat{CPB} = \widehat{C_1P_1B}$. Моннан P нокталарының M күплеге A һәм B нокталары аша үтүче, радиусы k га бәйле булган әйләнә икәнлеге килеп чыга.

12. $PC - APB$ почмагының биссектрисасы, $C \in [AB]$ булсын (247 нче рәсем), $|BP| = a$, $|AP| = ka$, $|PC| = l$, $\widehat{PCB} = \alpha$, $|CB| = c$ дип тамгалыйк. Ул вакытта $|AC| = kc$, ә косинуслар теоремасы буенча APB өчпочмагыннан:



247 нче рәсем

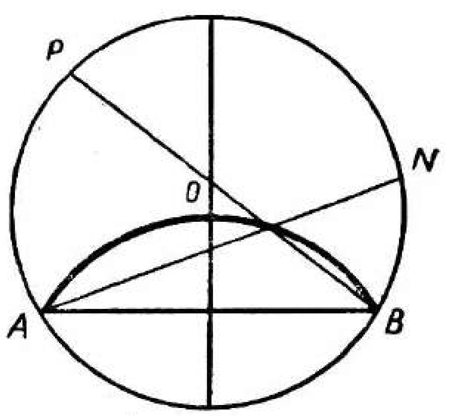
$$\cos\hat{B} = \frac{(k+1)^2c^2 + a^2 - k^2a^2}{2(k+1)ac} = \frac{(k+1)c^2 - (k-1)a^2}{2ac}$$

ны табабыз. Шул ук теорема буенча $\triangle PBC$ дан: $l^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} = k(a^2 - c^2)$. Ләкин

$\cos\alpha = \frac{c^2 + l^2 - a^2}{2lc}$, моннан $\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{2kc}{k-1}$,

ягъни $l = 2R\cos\alpha$, монда $R = \frac{kc}{k-1}$,

$k > 1$. Димәк, P ноктасы радиусы R булган, үзәге O AB турысында яткан һәм C ноктасы аша үтүче әйләнә өстендә ята.



248 нче рәсем

13. AB хордасының, аңа перпендикуляр диаметрның һәм әйләнәнең AOB дугасы берләшмәсе, монда O — бирелгән әйләнәнең үзәге (248 нче рәсем).

14. Мәсьәләнең шартыннан түбәндәге тигезлек килеп чыга:

$$|PA|\cdot|BC| + |PB|\cdot|AC| = |PC|\cdot|AB|.$$

Птолемей теоремасына кире теорема буенча $BCAP$ — диагональләре AB һәм PC булган камаулы дүртпочмак (§ 9 дан 16 нчы мәсьәләне кара). Шуңа күрә ABC өчпочмагын камаучы әйләнәнең AB дугасы эзләнелә торган ноктадар күплеге була.

15. Квадрат түбәләренең координаталары (a, a), $(-a, a)$, $(a, -a)$, $(-a, -a)$ булган турыпочмаклы координаталар системасын кертәбез. Ул вакытта (x, y) ноктасыннан квадратның якларына кадәр ераклыкларның квадратлары суммасы:

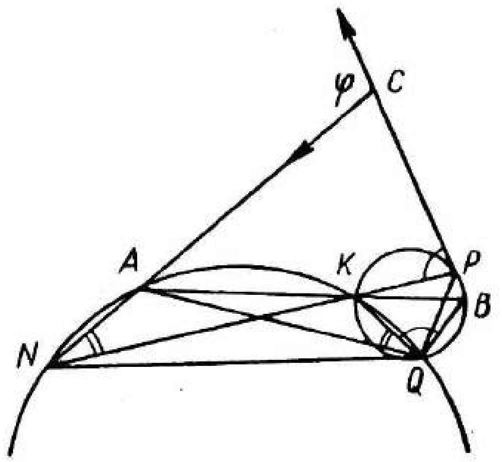
$$(a + x)^2 + (a - x)^2 + (a + y)^2 + (a - y)^2 = c^2 = \text{const}.$$

Моннан $x^2 + y^2 = \frac{c^2}{2} - 2a^2 = R^2$, димәк, M — квадрат белән $c > 2a$ шарты үтәлгәндә, үзәге квадрат үзәгендә булган R радиуслы әйләнәнең кисешмәсе була.

16. Әгәр O — $\triangle ABC$ га камаулы әйләнәнең үзәге булса, $\widehat{AOB} = 90° + \frac{\widehat{ACB}}{2}$. Шуңа күрә M күплеге ике әйләнәнең ике дугасыннан тора.

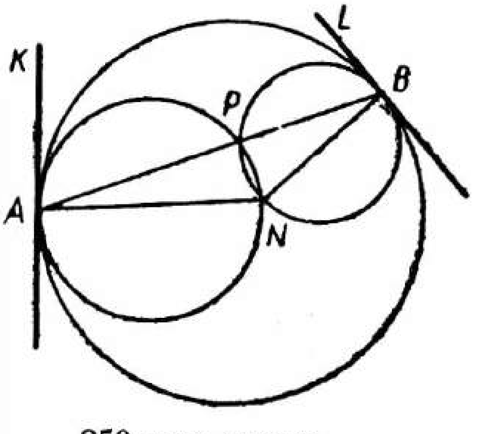
17. 10 нчы мәсьәләне карагыз.

18. B ноктасын A ноктасына чагылдыручы, үзәге Q булган охшашлыкны карагыз (249 нчы рәсем). Бу охшашлык P ноктасын N ноктасына чагылдыра. Әлеге охшашлыкның бору почмагы φ BQA почмагына тигез. Ләкин $\overrightarrow{BP}$ һәм $\overrightarrow{AN}$ арасындагы почмак шулай ук φ гә тигез. Димәк, Q ноктасы ABC әйләнәсендә ята.

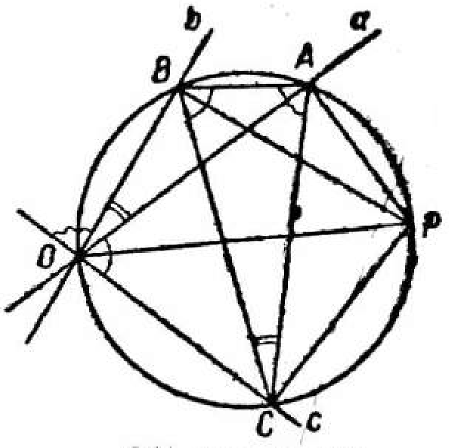


249 нчы рәсем

19. Бирелгән әйләнәгә A һәм B нокталарындагы орынмаларны (KA) һәм (LB) аша тамгалыйк (250 нче рәсем). Ә (AK) һәм (LB) на тиңдәшле



250 нче рәсем



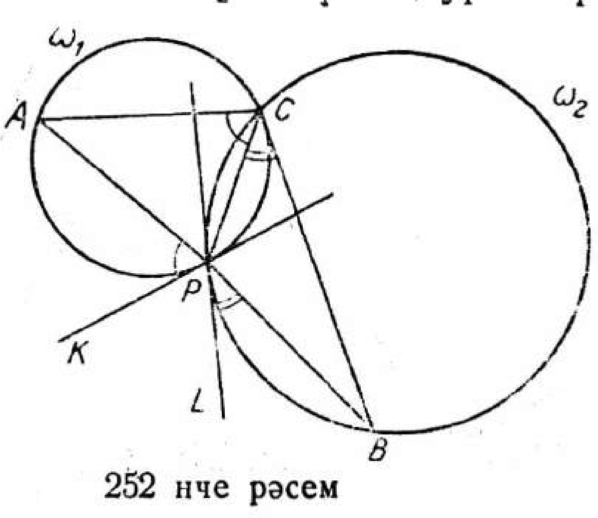
251 нче рәсем

рәвештә A һәм B ноктaларында орынучы һәм P ноктасы аша үтүче r_1 һәм r_2 радиуслы әйләнәләрнең икенче кисешү ноктасын N аша тамгалыйк. Ул вакытта $\widehat{PNA} = \widehat{PAK}$, ә $\widehat{PNB} = \widehat{PBL} = \widehat{PAK}$. Шулай булгач, $\widehat{ANB} = 2\,\widehat{ABL}$, ягъни M әйләнә була. Бу вакытта $2r_1 = \frac{|AP|}{\sin \widehat{ANP}}$, $2r_2 = \frac{|PB|}{\sin \widehat{PNB}}$, моннан $\frac{r_1}{r_2} = \frac{|AP|}{|PB|}$. (Әйләнәдән өч ноктаны чыгарып ташларга кирәк.)

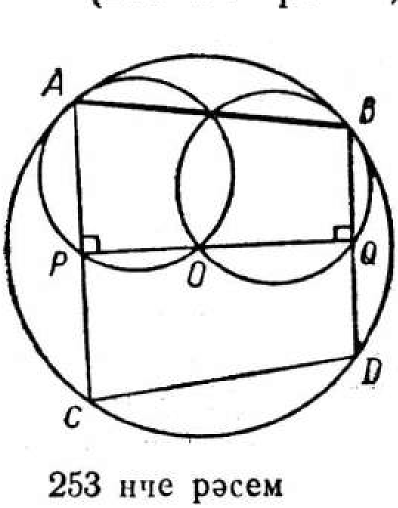
20. O, A, B, C, P ноктaлары $[OP]$ диаметрлы әйләнә өстендә яталар (251 нче рәсем). Моннан $\widehat{BCA} = (\widehat{a, b})$, $\widehat{ABC} = (\widehat{a, c})$, $\widehat{BAC} = (\widehat{b, c})$. $\triangle ABC$ ның билгеләнгән почмаклары һәм бирелгән мәйданы булганлыктан, ул билгеләнгән өчпочмакка конгруэнт. Шуңа күрә аны камаучы әйләнәнең билгеләнгән d диаметры була, өстәвенә $|OP| = d$. Шулай итеп, M — үзәге O ноктасында булган d радиуслы әйләнә.

21. ACP әйләнәсен ω_1, BCP ны ω_2 аша тамгалыйк (252 нче рәсем). (KP) — ω_1 әйләнәсенә орынма, ә (LP) — ω_2 әйләнәсенә орынма һәм KPL почмагы даими булсын. Ул вакытта $\widehat{ACP} = \widehat{APK}$, $\widehat{BCP} = \widehat{BPL}$, шуңа күрә $\widehat{APB} = \widehat{APK} + \widehat{KPL} + \widehat{LPB} = \widehat{ACP} + \widehat{PCB} + \widehat{KPL} = \widehat{ACB} + \widehat{KPL} = \text{const}$, ягъни M, A һәм B ноктaлары булмаган әйләнә була.

22. AB хордасы бирелгән. Параллель AC һәм BD хордалары алыйк. P һәм Q аларның урталары булсын (253 нче рәсем). Ул

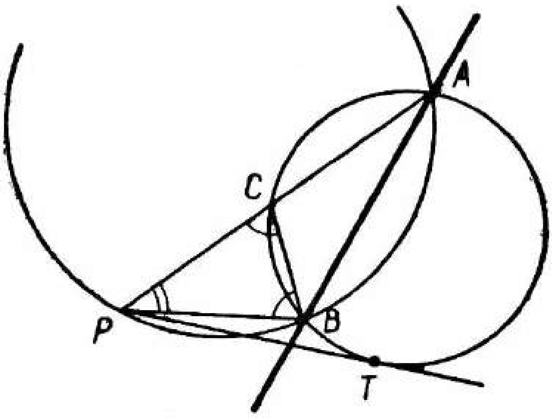


252 нче рәсем



253 нче рәсем

вакытта $[AC[$ нә параллель һәм $[AB[$ сен кисеп үтүче барлык хордаларының урталары күплеге әйләнә үзәге O аша үтүче PQ кисемтәсе була. Әгәр AC турылары бәйләм төзиләр икән, PQ турылары да төзиләр, шул ук вакытта APO һәм OQB почмаклары һәрвакыт туры. Димәк, M күплеге — бирелгән түгәрәкләрдән үзәкләре A һәм B, коэффициентлары $\frac{1}{2}$ булган гомотетияләр белән табылган түгәрәкләр күплеге була (бу түгәрәкләрнең кисешү нокталары бу күплеккә керми).



254 нче рәсем

23. BC һәм AB турыларыннан тигез ераклыкта — $P \in (AC)$ ноктасы, AC һәм AB турыларыннан тигез ераклыкта Q ноктасы алабыз. Ул вакытта (PQ) — эзләнелгән туры. Чыннан да, $S \in (PQ)$, $|PS| = h$ һәм S ноктасыннан (AC), (BC) һәм (AB) ларына кадәр ераклыклар тиңдәшле рәвештә h_1, h_2, h_3 кә тигез, ә P һәм Q нокталарыннан (AB) па кадәр ераклыклар h_0 һәм H_0 гә тигез булсын. Ул вакытта $h_1 = h \sin \varphi_1$, $h_2 = (|PQ| - h) \sin \varphi_2$, $h_3 = h_0 + h \sin \varphi_3$, монда $\varphi_1 = \widehat{QPC}$, $\varphi_2 = \widehat{PQC}$, $\varphi_3 = (\widehat{(PQ), (AB)})$. Табабыз: $h_1 + h_2 - h_3 = h(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 - \sin \varphi_3) + |PQ| \sin \varphi_2 - h_0$, $h = h_0$ һәм $h = |PQ|$ булганда табабыз: $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, моннан $\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 - \sin \varphi_3 = 0$ һәм $|PQ| \sin \varphi_2 - h_0 = 0$. Шуңа күрә $S \in [PQ]$ булганда $h_1 + h_2 - h_3 = 0$.

24. C ноктасы (AB) ның әйләнә белән икенче кисешү ноктасы булсын (254 нче рәсем). $|PT|^2 = |PA| \cdot |PC|$ булганга, $|PB| = |PC|$, шуңа күрә $\widehat{PCB} = \widehat{CBP}$ һәм, димәк, $\widehat{APB} = 2\widehat{ACB} - \pi = \text{const}$. Шулай итеп, $\{M\}$ — бирелгән әйләнәнең тышында урнашкан AB хордасына таянган әйләнә дугасы белән башлары AB турысының A һәм B нокталарында булган, бирелгән әйләнәнең тышында урнашкан ике нурның берләшмәсе була.

§ 11. ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

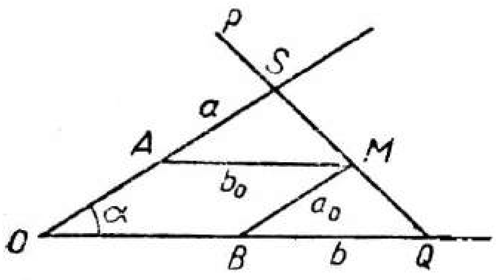
1. Өчпочмакны параллелограммга тутырыгыз.

2. Әгәр $\hat{A} = \hat{B}$ булса, $|CM| = |CL|$.

$$\hat{A} < \hat{B} \Rightarrow \frac{2\hat{B} + \hat{C}}{2} > \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^\circ$$

булсын, ләкин $\widehat{MLC} = \hat{B} + \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{MLC} > 90^\circ$ һәм $|CM| > |CL|$.

3. $(CD_0) \perp (CD)$ һәм DD_0 — диаметр булсын. Ул вакытта $|CD|^2 + |CD_0|^2 = |DD_0|^2$. Әгәр $M = (AB) \cap (CD)$ әйләнәнең



255 нче рәсем

тышында ятса, $|AB| < |CD_0|$, әгәр эчендә ятса, $|AB| > |CD_0|$. Югарыда язылган тигезлекне искә алып, таләп ителгән нәтиҗәне табабыз.

4. MN кисемтәсенең CD турысына проекциясе озынлыгы $[M_1N_1]$ нең CD кисемтәсе озынлыгыннан зуррак булуын күрсәтергә.

5. $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leqslant 2$ икәнен искәрәбез. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының катетлары озынлыгын a һәм b дип, гипотенуза озынлыгын c дип тамгалыйк, $\hat{A} = \alpha$, ул вакытта $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, шулай булгач, $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a+b}{c} \leqslant \sqrt{2}$.

6. $|AM| = b_0$, $|AS| = a$, $|MB_0|$, $= a_0$, $|QB| = b$ дип тамгалыйк, монда $(AM) \parallel (OQ)$, $(MB) \parallel (OS)$, $A \in [OS)$, $B \in [OQ)$ (255 нче рәсем). $\triangle ASM \sim \triangle MBQ$, шуңа күрә $\frac{a}{b_0} = \frac{a_0}{b}$, яки $ab = a_0b_0$ була. Аннан соң $S_{OSQ} = S_{OAMB} + (ab + a_0b)\sin\alpha$. Ләкин $ab_0 + a_0b \geqslant \sqrt{2aba_0b_0} = 2a_0b_0$, шуның белән бергә $ab_0 = a_0b$ булганда гына тигезлеккә ирешелә. Беренче тигезлек белән чагыштырып карап, $a = a_0$ не табабыз. Шулай итеп, $|OA| = |AS|$ булганда, $\triangle OSQ$ ның мәйданы минималь була, ягъни M — SQ кисемтәсенең уртасы.

7. $m_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$, $m_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$,

$$\frac{m_a^2}{m_b^2} = \frac{\frac{a^2}{4} + b^2}{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{4a^2+16b^2}{4a^2+b^2}\right) > \frac{1}{4}, \text{ яки } \frac{m_a}{m_b} > \frac{1}{2}.$$

Аналогик рәвештә $\frac{m_b}{m_a} > \frac{1}{2}$.

8. ABC һәм BCC_1 өчпочмакларыннан косинуслар теоремасы буенча табабыз (монда $[CC_1]$ — C почмагының биссектрисасы):

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \left(\frac{ca}{a+b}\right) - l_c^2}{2a\left(\frac{ca}{a+b}\right)},$$

моннан $l_c^2 = |CC_1|^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}((a+b)^2 - c^2)$. Аналогия буенча

$$l_a^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}\cdot((b+c)^2 - a^2),\ l_b^2 = \frac{ac}{(a+c)^2}\cdot((a+c)^2 - b^2).$$

Кушабыз:

$$l_a^2+l_b^2+l_c^2=p\left(\left(1-\frac{c}{a+b}\right)\frac{2ab}{a+b}+\left(1-\frac{b}{a+c}\right)\cdot\frac{2ac}{a+c}+\right.$$

$\left.+\left(1-\frac{a}{b+c}\right)\frac{2bc}{b+c}\right)$, монда $p=\frac{a+b+c}{2}$. $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{2}$, $\frac{2bc}{b+c}\leqslant\frac{b+c}{2}$, $\frac{2ac}{a+c}\leqslant\frac{a+c}{2}$ икәнлеген искә алып, табабыз:

$$l_a^2+l_b^2+l_c^2\geqslant\frac{p}{2}((a+b-c)+(a+c-b)+(b+c+a))=p^2.$$

9. Табабыз: $S=rp$, монда S — өчпочмакның мәйданы. Герон формуласы буенча $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Моннан $r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$. Ләкин өч санның арифметик уртасы үзлеге буенча $(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3=$ $=\frac{p^3}{27}$. Моннан $r^2\leqslant\frac{p^2}{27}$, яки $r\leqslant\frac{p}{3\sqrt{3}}$. Димәк, $S=rp\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

10. Герон формуласы буенча $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=$ $=\frac{h_A^2a^2}{4}$. Аннан соң $a^2\geqslant a^2-(b-c)^2=(a+c-b)\cdot(a+b-c)=$ $=4(p-b)(p-c)$. Моннан $h_A=\sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}}\leqslant$ $\leqslant\sqrt{p(p-a)}$.

11. 8 нче мәсьәлә буенча табабыз: $l_a^2=\frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2-a)^2=$ $=\frac{4bc}{(b+c)^2}\cdot\frac{(b+c+a)}{2}\,\frac{(b+c-a)}{2}=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$. Ләкин $4bc\leqslant$ $\leqslant(b+c)^2$. Шуңа күрә $l_a^2\leqslant p(p-a)$.

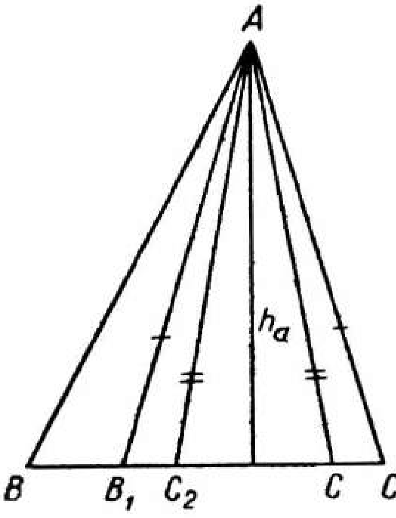
12. Синуслар теоремасы буенча табабыз: $\sin\hat{B}=\frac{b}{a}\sin\hat{A}$. Аннан соң $h_a=c\sin\hat{B}=\frac{cb}{a}\sin\hat{A}$, $h_b=c\sin\hat{A}$, моннан $a+h_a-$

$$-b-h_b=a+\frac{cb}{a}\sin\hat{A}-b-c\sin\hat{A}=\frac{a-b}{a}(a-c\sin\hat{A})=$$

$=\frac{a-b}{a}(a-h_b)>0$, чөнки $a>b$, $a\geqslant h_b$.

13. $S=\frac{bc\sin\alpha}{2}\leqslant\frac{bc}{2}$, монда α — ABC өчпочмагының $[AB]$ һәм $[AC]$ яклары арасындагы почмак һәм $|AB|=c$, $|AC|=b$. Ләкин $bc\leqslant\frac{b^2+c^2}{2}$. Шуңа күрә $S\leqslant\frac{b^2+c^2}{4}$.

14. A һәм B почмаклары кысынкы. Әгәр $\hat{A}=90^\circ-\hat{B}$ булса, $\operatorname{tg}\hat{A}=\operatorname{ctg}\hat{B}$. Әгәр $\hat{A}>90^\circ-\hat{B}$, ягъни ABC өчпочмагы кысынкы-



256 нчы рәсем

почмаклы булса, $\operatorname{tg}\hat{A} > \operatorname{ctg}\hat{B}$, яки $\operatorname{tg}\hat{A} \times \operatorname{tg}\hat{B} > 1$. Әгәр инде $\hat{A} < 90° - \hat{B}$, ягъни ABC өчпочмагы җәенкепочмаклы булса, $\operatorname{tg}\hat{A} < \operatorname{ctg}\hat{B}$, яки $\operatorname{tg}\hat{A}\cdot\operatorname{tg}\hat{B} < 1$ була.

15. $\triangle AB_1C_1$ тигезьянлы (256 нчы рәсем) һәм $\widehat{B_1AC_1} = \hat{A}$, $B_1, C_1 \in (BC)$ булсын. Тигезьянлы $\triangle ACC_2$ төзибез. Ул вакытта $[AB_1] - \triangle ABC_2$ дә биссектриса. $BB_1A > 90°$ булганлыктан, 2 нче мәсьәлә буенча $|BB_1| > |B_1C_2|$, моннан $a = |BC| > |B_1C_1|$ була. Ләкин $|B_1C_1| = 2h_a \operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}$, шуңа күрә $a > 2h_a\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}$. Әгәр инде $\hat{C}_1 = \hat{C}$ икән, $a = 2h_a\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}$ була.

16. $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ дип тамгалыйк. $\triangle ABC$ ның мәйданы $S = \frac{ab}{2} = \frac{(a+b+c)}{2}\cdot r$ га тигез, моннан $r = \frac{ab}{a+b+c}$. Аннан тыш, $R = \frac{c}{2}$, $R + r = \frac{ab}{a+b+c} + \frac{c}{2} = \frac{2ab+ac+bc+c^2}{2(a+b+c)} =$

$$= \frac{2ba+bc+ac+a^2+b^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b)^2+c(a+b)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} = \sqrt{2S}.$$

17. A почмагының биссектрисасы $[AA_1]$ булган $\triangle AA_1C$ дан табабыз:

$$|AC| = b,\ |A_1C| = \frac{ab}{b+c},\ |AA_1| = l_a = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{b+c}$$

(8 нче мәсьәләне кара). Монда $a = |BC|$, $c = |AB|$. Синуслар теоремасы буенча $\frac{l_a}{\sin\hat{C}} = \frac{|A_1C|}{\sin\hat{A}}$.

$$\sin\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sin\hat{C}\cdot|A_1C|}{l_a} = \frac{ab\sin\hat{C}}{(b+c)\,l_a} = \frac{2S}{\sqrt{bc\,((b+c)^2-a^2)}},$$

монда $S - \triangle ABC$ ның мәйданы. Герон формуласын кулланып, табабыз: $\sin\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}$. Аннан соң $b\sin\frac{\hat{A}}{2} \leqslant |CA_1| = \frac{ab}{b+c}$, яки $\sin\frac{\hat{A}}{2} \leqslant \frac{a}{b+c}$. Аналогия буенча $\sin\frac{\hat{B}}{2} \leqslant \frac{b}{a+c}$, $\sin\frac{\hat{C}}{2} \leqslant \frac{c}{a+b}$. Моннан $\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2} \leqslant$

$$\leqslant \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{abc}{c(a^2+b^2)+b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)+2abc} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{abc}{c(2ab)+b(2ac)+a(2bc)+2abc} = \frac{1}{8}.$$

18. $a \geqslant b \geqslant c$ дип фараз итик, монда $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. 17 нче мәсьәлә формулаларын файдаланып, табабыз:

$$\sin^2\frac{2\hat{A}}{2} + \sin^2\frac{\hat{B}}{2} + \sin^2\frac{\hat{C}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} + \frac{b^2-(a-c)^2}{4ac} +$$

$$+ \frac{c^2-(a-b)^2}{4cb} - \frac{3}{4} = \frac{a(a^2-(b-c)^2)+b(b^2-(c-a)^2)+c(c^2-(a-b)^2)-3abc}{4abc} =$$

$$= \frac{a^3+b^3+c^3+3abc-a(b^2+c^2)-b(a^2+c^2)-c(a^2+b^2)}{4abc} =$$

$$= \frac{(a-b)^2(a+b-c)+c(a-c)(b-c)}{4abc} \geqslant 0.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} \geqslant 0.$$

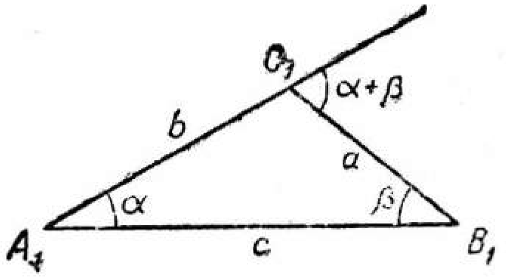
Тригонометриянең төп бердәйлегеннән табабыз: $\cos^2\frac{\hat{A}}{2} + \cos^2\frac{\hat{B}}{2} + \cos^2\frac{\hat{C}}{2} \leqslant \frac{9}{4}$. Ләкин $3\left(\cos^2\frac{\hat{A}}{2} + \cos^2\frac{\hat{B}}{2} + \cos^2\frac{\hat{C}}{2}\right) \geqslant$

$$\geqslant \left(\cos\frac{\hat{A}}{2} + \cos\frac{\hat{B}}{2} + \cos\frac{\hat{C}}{2}\right)^2.$$

Моннан $\cos\frac{\hat{A}}{2} + \cos\frac{\hat{B}}{2} + \cos\frac{\hat{C}}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

19. $45° - \frac{\hat{A}}{4} = \alpha$, $45° - \frac{\hat{B}}{4} = \beta$, $45° - \frac{c}{4} = \gamma$ дип тамгалыйк. $\alpha+\beta+\gamma = 90°$, $\gamma = 90° - (\alpha+\beta)$ булуы билгеле. $\hat{A}_1 = \alpha$, $\hat{B}_1 = \beta$, $|A_1B_1| = c$, $|B_1C_1| = a$, $|C_1A_1| = b$ булган $\triangle A_1B_1C_1$ ын карыйк (257 нче рәсем). Әгәр $S - \triangle A_1B_1C_1$ нын мәйданы булса, $\sin\alpha = \frac{2S}{bc}$, $\sin\beta = \frac{2S}{ac}$. Аннан тыш, косинуслар теоремасы буенча

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} \geqslant 0.$$



257 нче рәсем

Герон формуласын файдаланып, табабыз: $\frac{1}{8} - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma =$

$$= \frac{1}{8} - \sin\alpha\sin\beta\sin(90° - (\alpha+\beta)) =$$

$$= \frac{1}{8} - \sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{8} -$$

$$-\frac{4S^2(c^2-a^2-b^2)}{2a^2b^2c^2}=\frac{a^2b^2c^2-(c^2-a^2-b^2)((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)}{8a^2b^2c^2},$$

$$(c^2-a^2-b^2)((a+b)^2-c^2)\leqslant\left(\frac{c^2-a^2-b^2+(a+b)^2-c^2}{2}\right)^2=a^2b^2$$

булганлыктан, табабыз:

$$\frac{a^2b^2c^2-(c^2-a^2-b^2)((a+b)^2-c^2)(c^2-(a^2-b)^2)}{8abc}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a^2b^2c^2-a^2b^2(c^2-(a-b)^2)}{8a^2b^2c^2}=\frac{(a-b)^2}{8c^2}\geqslant 0.$$

20. Косинуслар теоремасы буенча $\triangle ABC$ нан табабыз: $\cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}$, $\cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, монда a, b, c $\triangle ABC$ ның яклары озынлыгы. $c\leqslant b\leqslant a$ дип уйлыйк. Табабыз:

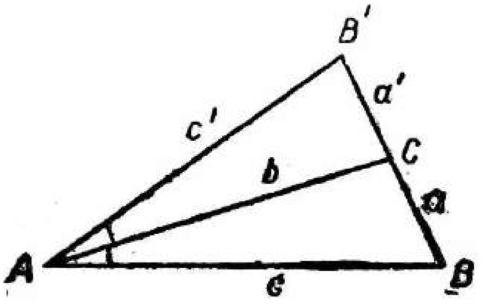
$$\frac{1}{8}-\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}=\frac{a^2b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2}=$$

$$=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)+c^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2}\geqslant 0.$$

$(a^2-b^2)^2(a^2+b^2-c^2)+c^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)\geqslant 0$ тигезсезлеген: $c^2(a^2+b^2-c^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)^2+a^2(c^2+b^2-a^2)^2\geqslant 3a^2b^2c^2$ рәвешендә язарга мөмкин, моннан

$$\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}+\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2c^2}+\frac{(c^2+b^2-a^2)^2}{4b^2c^2}=$$

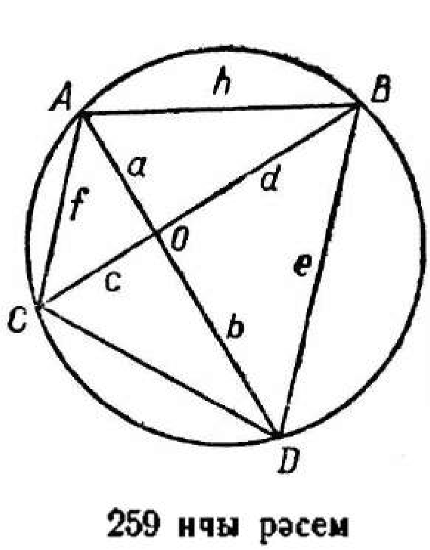
$$=\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}\geqslant\frac{3}{4}.$$



258 нче рәсем

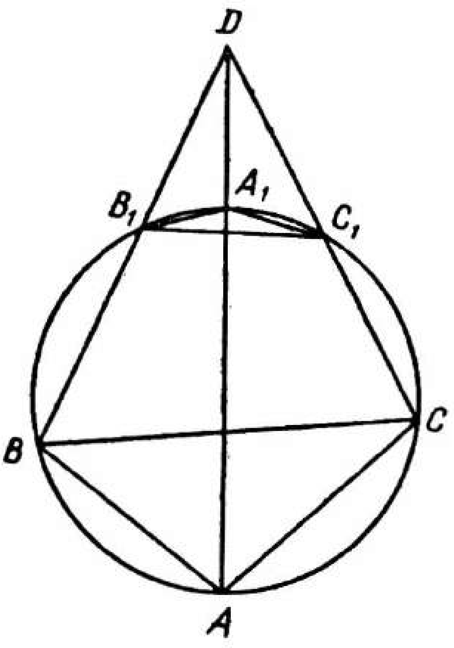
21. Әгәр тригонометриянең төп бердәйлеген исәпкә алсаң, тигезсезлек 20 нче мәсьәләнең соңгы тигезсезлегеннән килеп чыга.

22. $\widehat{CAB'}=\hat{A}$ һәм $\hat{B}'\in(BC)$ булган $\triangle AB'C$ ын төзибез (258 нче рәсем). $[AC]-BAB'$ почмагының биссектрисасы, $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$, $a'=|B'C|$, $c'=|AB'|$ булсын. $\triangle ABB'$ ның биссектрисасы үзлеге буенча табабыз: $\frac{a'}{c'}=\frac{a}{c}$, яки $\frac{a+a'}{c+c'}=\frac{a}{c}$. Аннан соң $b^2=c'c\left(1-\left(\frac{a+a'}{c+c'}\right)^2\right)=cc'\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)$ (8 нче мәсьәләне кара). Моннан $c'=\frac{b^2a}{c^2-a^2}$,



259 нчы рәсем

$a' = \frac{b^2 a}{c^2 - a^2}$. Табабыз: $\cos 2\hat{A} = \frac{c^2 + c'^2 - (a + a')^2}{2cc'} = 2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) - 1 = 2\cos^2 \hat{A} - 1$. Аналогия буенча $\cos 2\hat{B} = 2\cos^2 \hat{B} - 1$, $\cos 2\hat{C} = 2\cos^2 \hat{C} - 1$. Ләкин $\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} \geqslant \frac{3}{4}$, моннан $\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} + \cos 2\hat{C} \geqslant \frac{6}{4} - 3 = -\frac{3}{2}$.



260 нчы рәсем

23. $|OA| = a$, $|OD| = b$, $|OC| = c$, $|OB| = d$, $|BD| = e$, $|AC| = f$, $|AB| = h$ дип тамгалыйк (259 нчы рәсем). Монда $O - AD$ һәм BC турыларының кисешү ноктасы. $\triangle AOC \sim \triangle BOD$ булганга күрә, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Кисүчеләр үзлеге буенча $ab = cd$. Моннан $a = c$, $b = d$. $\angle BOD$ — туры почмак, шуңа күрә Пифагор теоремасы буенча $e^2 = 2d^2$. Аналогик рәвештә $f^2 = 2a^2$. Шулай итеп, $e^2 + f^2 = 2(a^2 + d^2) = 2h^2$ яки $h^2 = \frac{e^2 + f^2}{2} \geqslant ef$, ягъни $|AB|^2 \geqslant |AC| \cdot |BD|$.

24. 9 нчы мәсьәлә буенча табабыз: $S \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, монда $p = \frac{a + b + c}{2}$. Ләкин $(a + b + c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Моннан $S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$.

25. A, B, C нокталары аша әйләнә үткәрәбез һәм аның (AD), (BD) һәм (CD) турылары белән кисешү нокталарын A_1, B_1, C_1 аша тамгалыйбыз (260 нчы рәсем). Охшаш өчпочмаклар килеп чыга: $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D$, $\triangle BCD \sim B_1C_1D$, $\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D$. Бу өчпочмакларның охшашлыгыннан табабыз:

$$\frac{|A_1B_1|}{|B_1D|} = \frac{|AB|}{|AD|}, \quad \frac{|B_1D|}{|B_1C_1|} = \frac{|DC|}{|BC|}, \quad \frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|AB| \cdot |DC|}{|AD| \cdot |BC|};$$

$$\frac{|A_1C_1|}{|DC_1|} = \frac{|AC|}{|AD|}, \quad \frac{|DC_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|BD|}{|BC|}, \quad \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|},$$

$$\frac{|A_1B_1| + |A_1C_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|AB| \cdot |CD| + |AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|} \geqslant \frac{|B_1C_1|}{|B_1C_1|} = 1.$$

Бирелгән нокталарны башкача урнаштырганда чишелешнең рәвеше үзгәрә.

КУШЫМТА

1. ВЕКТОРНЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ

1. Яссылыкта коллинеар булмаган $\vec{e}_1$ һәм $\vec{e}_2$ векторларын сайлап алыйк. Бу векторларның икесе дә нуль-вектор түгел. Аларны ниндидер O ноктасыннан башлап салабыз: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$. $\vec{a}$ — ирекле вектор булсын. Аны O ноктасыннан үлчәп салгач, A ноктасын табабыз: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. A ноктасы аша, OE_1 һәм OE_2 турыларына параллель итеп, (OE_2) һәм (OE_1) не A_2, A_1 нокталарында кисүче турылар үткәрик (261 нче рәсем). Векторларны кушу кагыйдәсеннән: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ тигезлеге килеп чыга. Ләкин $\overrightarrow{OA_1}$ векторы $\vec{e}_1$ векторына коллинеар. Шуңа күрә $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\vec{e}_1$. Аналогик рәвештә $\overrightarrow{OA_2} = \beta\vec{e}_2$ дип язарга мөмкин. Шулай итеп,

$$\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 \qquad (1)$$

тигезлеге дөрес була.

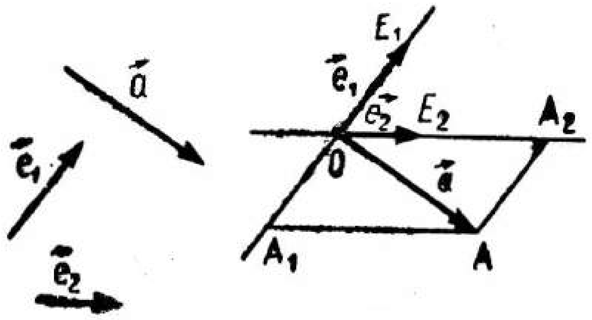
$\vec{a}$ векторын коллинеар булмаган $\vec{e}_1$ һәм $\vec{e}_2$ векторларының α һәм β саннарына тапкырчыгышлары суммасы рәвешендә күрсәтүне $\vec{a}$ векторын шул векторлар буенча *таркату* дип атыйлар. Бирелгән $\vec{e}_1$ һәм $\vec{e}_2$ векторларын *базис* векторлар яки *координата векторлары*, ә α һәм β саннарын *$\vec{a}$ векторының $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ базисындагы координаталары* дип атыйлар.

Шулай итеп, яссылыкның һәр векторы бирелгән базиста таркатыла, ә бу таркату векторның координаталарын бирә. Мондый таркатуның *бердәнбер* булуын, ягъни $\vec{a} = \alpha'\vec{e}_1 + \beta'\vec{e}_2$ тигезлегеннән (1) шарты үтәлгәндә $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ килеп чыгуын исбат итик.

Чыннан да, әгәр $\vec{a} = \alpha'\vec{e}_1 + \beta'\vec{e}_2 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$ булса, векторлар өстендә гамәлләрнең төп үзлекләреннән файдаланып, $(\alpha' - \alpha)\vec{e}_1 + (\beta' - \beta)\vec{e}_2 = 0$ дип язарга мөмкин. Әгәр табылган тигезләмәдәге коэффициентларның берсе генә нульгә тигез булмаса да, $\vec{e}_1$ һәм

$\vec{e}_2$ векторларының берсе икенчесеннән тапкырлаучысы белән аерылып торачак, мәсәлән $\vec{e}_2 = -\frac{\alpha' - \alpha}{\beta' - \beta} \cdot \vec{e}_1$, $\beta' - \beta \neq 0$. Ләкин мондый очракта $\vec{e}_2$ векторы $\vec{e}_1$ векторына коллинеар була, ә бу векторларны сайлауга каршы килә. Димәк, $\beta' - \beta \neq 0$ каршылыкка китерә. Шул рәвешле $\alpha' - \alpha \neq 0$ шарты да каршылыкка китерә. $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ очрагы гына кала, шуның белән таркатуның бердәнберлеге исбатлана да.

(1) тигезлеге буенча α һәм β саннарының һәр пары $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ базисларына карата векторларны беркыйммәтле билгели, ягъни пар санның бирелгән базиска карата билгеле бер векторның координаталары булып хезмәт итүен искәртеп китәргә кирәк. (1) урынына кыскарак: $\vec{a}_{\vec{e}_1\vec{e}_2} = (\alpha; \beta)$ язылышын, яки, әгәр барлык векторлар беркыйммәтле базис белән каралсалар, тагын да кыскарак $\vec{a} = (\alpha; \beta)$ язылышын кулланырбыз.



261 нче рәсем

2. Координаталарда векторларны кушу һәм векторны санга тапкырлау операцияләрен карап үтик.

$p\vec{a} + q\vec{b}$ векторының координаталарын $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының координаталары һәм бирелгән p һәм q саннары аша исәплик.

$\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$ булсын. Ул вакытта $p\vec{a} = p(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2)$, $q\vec{b} = q(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)$, $p\vec{a} + q\vec{b} = (px_1 + qx_2)\vec{e}_1 + (py_1 + qy_2)\vec{e}_2$. Шулай итеп,

$$p\vec{a} + q\vec{b} = (px_1 + qx_2;\ py_1 + qy_2). \quad (2)$$

Әгәр $p = 1$, $q = \pm 1$ булса, (2) тигезлегеннән

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2)$$

килеп чыга.

Ике вектор суммасының (аермасының) координаталары бирелгән векторларның бер исемдәге координаталары суммасына (аермасына) тигез була.

Инде әгәр $q = 0$ булса, (2) дән $p\vec{a} = (px_1;\ qy_1)$ килеп чыга. *Векторның санга тапкырчыгышы координаталары бу векторның бер исемдәге координаталарының бирелгән санга тапкырчыгышына тигез була.*

Искәрмә. Тагы да гомумирәк формуланың дөреслеген күрсәтергә мөмкин:

$$p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + \ldots + p_n\vec{a}_n = (p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n; \quad p_1y_1 + p_2y_2 + \ldots + p_ny_n), \tag{3}$$

монда $\vec{a}_1 = (x_1; \ y_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2; \ y_2)$, ..., $\vec{a}_n = (x_n; \ y_n)$, p_1, p_2, ..., p_n — ирекле саннар.

II. НОКТАНЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ

1. Яссылыкта ниндидер O ноктасын сайлап алыйк һәм шул ноктадан башлап коллинеар булмаган $\vec{e}_1$ һәм $\vec{e}_2$ векторларын салыйк. Әгәр A — яссылыкта ирекле рәвештә алынган нокта булса, $\vec{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, монда x һәм y — $\vec{OA}$ векторының $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ базисындагы координаталары.

Шулай итеп, без A ноктасына ике координата — x абсциссасын һәм y ординатын язабыз, алар $\vec{OA}$ векторының мәңгелеккә билгеләнгән O ноктасына карата беренче һәм икенче координаталары белән туры киләләр. Бу ноктаны *координаталар башлангычы,* ә OE_1 һәм OE_2 юнәлешле турыларын *координата күчәрләре* дип атыйлар, монда $\vec{OE_1} = \vec{e}_1$, $\vec{OE_2} = \vec{e}_2$.

O ноктасы белән базис векторлары $\vec{e}_1$ һәм $\vec{e}_2$ яссылыкта ноткалар өчен *гомуми Декартча координаталар системасын* бирәләр.

Аерым очракта, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, $(\widehat{\vec{e}_1; \vec{e}_2}) = 90°$ булганда, координаталар системасы *Декартча турыпочмаклы* координаталар системасы дип атала.

Әгәр A ноктасының координаталары x һәм y булса, болай язалар: $A(x; \ y)$.

2. Өч ноктаның бер туры өстендә яту шартын табу һәм ноткаларның берсе очлары башка ике ноктада яткан кисемтәне бүлү чагыштырмасын исәпләү өчен, ноткаларның координаталарын файдаланыйк.

Бер туры өстендә яткан өч нокта: $A(x_1; \ y_1)$, $B(x_2; \ y_2)$, $C(x_3; \ y_3)$ ны карап үтик. Табабыз:

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (x_3 - x_1; \ y_3 - y_1),$$

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = (x_2 - x_3; \ y_2 - y_3).$$

Ләкин $\vec{AC} = k\vec{CB}$. Шуңа күрә

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = k(x_2 - x_3), \\ y_3 - y_1 = k(y_2 - y_3) \end{cases} \tag{4}$$

системасын табабыз.

Бу системаның k га карата бергәлеге өч ноктаның бер туры өстендә ятуы өчен кирәкле һәм җитәрлек шарт була.

(4) системасы урынына кайчагында, $x_2 - x_3 \neq 0$ һәм $y_2 - y_3 \neq 0$ дип шарт куеп, пропорция язалар:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3}. \qquad (5)$$

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$ тигезлегеннән

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$

килеп чыга.

Моннан, A һәм B нокталарын һәм k санын белгәндә, $\overrightarrow{OC}$ векторын исәпләп була:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1 + k}, \qquad (6)$$

яки координаталары аша язганда:

$$x_3 = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y_3 = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}. \qquad (7)$$

Аерым очракта, $k = 1$ булганда C ноктасы AB кисемтәсенең уртасы белән тәңгәл килә. Шуңа күрә AB кисемтәсе уртасының координаталары x_0, y_0

$$x_0 = \frac{x_1 + y_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

формулалары буенча исәпләнәләр.

III. ЯССЫЛЫКЛАР ОХШАШЛЫГЫ

Охшаш үзгәртү төшенчәсен искә төшерик.

Теләсә нинди A һәм B нокталары һәм аларның образлары A_1 һәм B_1 өчен $|A_1B_1| = k|AB|$ тигезлеге үтәлерлек итеп, яссылыкның үзенә чагылдырылуы, монда k — уңай сан, яссылыкны охшашлык коэффициенты k белән охшаш үзгәртү дип атала.

Әгәр $k = 1$ булса, охшашлык күчешкә әверелә.

Алга таба, охшашлык турында сөйләгәндә, күчүдән аермалы булган охшашлыкны күз алдында тотарбыз.

Һәртөрле охшашлыкны гомотетия белән (үзәге ирекле рәвештә алынган һәм коэффициенты охшашлык коэффициентына тигез булган) *күчүнең композициясе дип күз алдына китереп була.* Гомотетия һәм күчүнең беренче төр композициясе беренче төр охшашлык була. Гомотетия һәм күчүнең икенче төр композициясе икенче төр охшашлык була. Беренче төр охшашлык яссылыкның ориентациясен саклап кала (үзгәрешсез калдыра), икенче төр охшашлык аны капма-каршыга үзгәртә.

Охшашлыкны гомотетия һәм күчүнең композициясе рәвешендә беркыйммәтле биреп булмый. *Һәртөрле беренче төр охшашлыкның я гомотетия, я уртак үзәкле гомотетия һәм боруның композициясе* икәнен күрсәтергә мөмкин. Бу уртак үзәк — *охшашлыкның кузгалмас ноктасы* һәм ул беренче төр *охшашлык үзәге* дип атала. Беренче төр охшашлыкны уртак үзәкле гомотетиянең һәм боруның композициясе рәвешендә бирү *бердәнбер,* һәм бу ике үзгәртүне теләсә нинди тәртиптә эшләргә була.

Беренче төр охшашлыкның шундый үзлеге бар: *нур юнәлеше белән аның образы арасындагы почмак бирелгән охшашлык өчен даими була.* Шуңа күрә беренче төр охшашлык үзенең үзәге, коэффициенты һәм бору почмагы яки үзәге һәм тиңдәш пар ноктасы белән беркыйммәтле бирелә.

Һәртөрле икенче төр охшашлыкны гомотетиянең һәм күчәре гомотетия үзәге аша үтүче симметриянең композициясе рәвешендә беркыйммәтле бирергә мөмкин. Икенче төр охшашлыкны болай бирү бердәнбер. Композициядә компонентларның урыннарын алыштырып куюдан охшашлык үзгәрми. Бу очракта гомотетия үзәге *охшашлыкның кузгалмас ноктасы* була.

Икенче төр охшашлык — үзәге һәм охшашлык үзәгеннән башланган нур өстендә ятучы тиңдәшле ноктралар пары белән беркыйммәтле бирелә.

ЭЧТӘЛЕК

Сүз башы 3

I бүлек

Геометриядән башлангыч төшенчәләр

§ 1. Кереш 5
Ераклыклар 5
Геометрик фигуралар 5
§ 2. Фигураларның конгруэнтлыгы һәм күчүләр 7
Фигураларны чагылдыру 7
Күчүләр 7
Бору 8
Үзәкле симметрия 8
Күчәрле симметрия 9
§ 3. Параллельлек һәм параллель күчерү 11
Параллельлек һәм үзәкле симметрия 11
Юнәлешләр. Өчпочмакның почмаклары суммасы. Турыларның параллельлек билгеләре 12
Параллель күчерү. Фалес теоремасы. Өчпочмакның урта сызыгы . . 13

II бүлек

Күппочмаклар

§ 1. Күппочмак билгеләмәсе 15
Гади йомык сынык сызык. Күппочмак 15
Күппочмакның почмаклары суммасы 16
§ 2. Өчпочмаклар 18
Өчпочмак төзү 18
Өчпочмакның яклары белән почмаклары арасындагы бәйләнешләр 18
§ 3. Дүртпочмаклар 18
Параллелограмм билгеләмәсе 18
Параллелограммның үзлекләре 19
Параллелограммның билгеләре 20
Төрле мәсьәләләр 21
Кирәкле һәм җитәрлек шартлар 22
Турыпочмаклык 22
Ромб 23
Квадрат 24
Трапеция 26
Төрле мәсьәләләр 27
§ 4. Күппочмакларның мәйданнары 28
Турыпочмаклыкның мәйданы 28
Квадратның мәйданы 30
Параллелограммның мәйданы 31
Өчпочмакның мәйданы 32
Трапециянең мәйданы 35
Төрле мәсьәләләр 36

III бүлек

Әйләнә һәм түгәрәк

Әйләнә, хорда, орынма 40
Үзәк почмаклар һәм дугалар 41
Үзәктән хордага кадәр ераклык 42

IV бүлек

Векторлар

Векторларны кушу һәм алу. Векторны санга тапкырлау 43
Векторларның коллинеарлыгы 45
Векторның озынлыгы. Ике векторның юнәлешләре арасындагы почмак 45
Төрле мәсьәләләр 47

V бүлек

Охшашлык

§ 1. Гомотетия 49
Гомотетиянең төп үзлекләре 49
Ике һәм аннан да күбрәк гомотетияләр 49
Әйләнәләр гомотетиясе 50
Гомотетияне геометрик мәсьәләләр чишүдә куллану 51
Пропорциональ кисемтәләр 51
§ 2. Охшашлык 53
Охшаш өчпочмаклар 53
Охшаш күппочмаклар 54
Төзүгә мәсьәләләр чишүдә охшашлык методы 55

VI бүлек

Борулар һәм тригонометрик функцияләр

Борулар 58
Синус һәм косинус 58

VII бүлек

Өчпочмакта метрик бәйләнешләр

Косинуслар теоремасы 60
Өчпочмак мәйданнарын исәпләү формулалары 61
Синуслар теоремасы 62

VIII бүлек

Камаулы һәм камаучы күппочмаклар

§ 1. Камаулы һәм камаучы өчпочмаклар 63
Камаулы почмак 63
Камаулы һәм камаучы өчпочмаклар 65
§ 2. Камаулы һәм камаучы дүртпочмаклар 66
Камаулы дүртпочмаклар 66
Камаучы дүртпочмаклар 66
Төрле мәсьәләләр 67
§ 3. Төзек күппочмаклар 67
Төзек күппочмаклар 67
Төзек күппочмакның мәйданы 69
Төрле мәсьәләләр 69

§ 4. Әйләнә озынлыгы һәм түгәрәк мәйданы 70
Әйләнә озынлыгы 70
Түгәрәк мәйданы 71

IX бүлек

Стереометриядән башлангыч мәгълүматлар

§ 1. Пространствода нокталарның, турыларның һәм яссылыкларның үзара торышы 74
Туры һәм яссылыкларның төп үзлекләре 74
Туры белән яссылыкның үзара торышы. Яссылыкка перпендикуляр 75
Параллель яссылыклар 75
Ортогональ проекцияләү 76
§ 2. Өслекләрнең мәйданнары һәм кайбер җисемнәрнең күләмнәре . . 76
Туры призма 76
Күләмнәрнең гомуми үзлекләре 77
Пирамидалар 77
Цилиндр 78
Конус 78
Шар 79

Класстан тыш һәм индивидуаль эшләр өчен мәсьәләләр

§ 1. Күчәрле симметрия. Күчәрле симметрияләрнең композициясе . . 80
§ 2. Параллель күчерү һәм үзәкле симметрия. Бору. 82
§ 3. Векторлар 84
§ 4. Гомотетия 87
§ 5. Охшашлык 89
§ 6. Координаталар 90
§ 7. Координаталы-векторлы метод 93
§ 8. Мәйданнар 95
§ 9. Метрик бәйләнешләр 98
§ 10. Нокталарның күплекләре 101
§ 11. Тигезсезлекләр 103

Җаваплар һәм күрсәтмәләр

I бүлек. Геометриядән башлангыч төшенчәләр 106
II бүлек. Күппочмаклар 119
III бүлек. Әйләнә һәм түгәрәк 128
IV бүлек. Векторлар 131
V бүлек. Охшашлык 144
VI бүлек. Борулар һәм тригонометрик функцияләр 155
VII бүлек. Өчпочмакта метрик бәйләнешләр 156
VIII бүлек. Камаулы һәм камаучы күппочмаклар 160
IX бүлек. Стереометриядән башлангыч төшенчәләр 163
Класстан тыш һәм индивидуаль эшләр өчен мәсьәләләр 168
Кушымта 216

Валерий Александрович Гусев, Галина Герасимовна Маслова,
Захар Александрович Скопец, Ростислав Семенович Черкасов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 6—8 КЛАССОВ

(Перевод с русского на татарский язык)

Рецензенты *З. Г. Мортазин*
Редакторлары *Ф. М. Хафизова. З. Х. Билалова*
Художество редакторы *Э. Е. Сподикова*
Техник редакторы *В. Н. Галкина*
Корректорлары *Ф. К. Әхмәтҗанова, Ш. Т. Җиһангирова*

ИБ № 2737

Наборга бирелде 28/I-1982 ел. Басарга кул куелды 7/XII-1982 ел. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Гарнитура литературная. Печать высокая. Типография кәгазе № 1. Учетн.-изд. таб. 12,5. Басма табак 14,0. Усл. кр. отт. 14,3. Тираж 5700. Заказ У-52. Бәясе 50 тиен.

Татарстан китап нәшрияты, Казан, Бауман ур., 19.
Татарское книжное издательство, Казань, ул. Баумана, 19.

Татарстан АССР Нәшрият, полиграфия, китап сәүдәсе эшләре дәүләт комитетының
Камил Якуб исемендәге полиграфия комбинаты. Казан, Бауман ур., 19 йорт.

50 тиен